

Algebra und Zahlentheorie.

Menge, W. O.: On the rank of the product of certain square matrices. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 88—94 (1932).

Aus der Kenntnis der Elementarteiler einer Matrix A lassen sich u. a. Aussagen gewinnen über den Rang der Produktmatrix $\prod_{i=1}^r (A - \lambda_i E)^{k_i}$, wobei die λ_i die Nullstellen von $f(\lambda) = |A - \lambda E|$, die k_i beliebige natürliche Zahlen bedeuten. Grell (Jena).

Mignosi, G.: Perfezionamento del teorema di Francœur e Binet sulle funzioni di Sturm. Note Esercit. Mat. 6, 1—10 (1931).

A und B seien zwei Polynome der Grade n und m . Man wende auf sie den euklidischen Algorithmus an. Es wird bewiesen: Wenn man in zwei aufeinanderfolgenden Divisionen des Algorithmus jedesmal den Dividenten mit derjenigen Potenz des ersten Koeffizienten (bei fallenden Potenzen) des Divisors multipliziert, die den Grad des zugehörigen Quotienten um 1 übertrifft, so sind die Koeffizienten des Restes der zweiten Division ganz und durch den in der ersten Division eingeführten Faktor teilbar in dem Integritätsbereich, der durch die Koeffizienten von A und B definiert ist. In bisherigen Arbeiten sind die Koeffizienten immer als unabhängig angenommen worden; so auch bei Francœur und Binet, die den gleichlautenden Satz für $m = n - 1$ bewiesen haben. Mignosi gewinnt den Beweis des allgemeinen Satzes gerade durch Einbeziehung der Tatsache, daß Abhängigkeiten (Teilbarkeiten der späteren Koeffizienten durch den ersten im Divisor beider Divisionen) auftreten können. Daran wird bezüglich dieser Teilbarkeiten eine subtile Fallunterscheidung geknüpft.

Rolf Müller (Berlin).

Spampinato, Nicolò: Le reciprocità riemanniane di una matrice di Riemann. Note Esercit. Mat. 6, 43—50 (1931).

Die Riemannschen Formen einer Riemannschen Matrix $\omega = (\alpha_{jr} + \beta_{jr}i)$ ($j = 1, \dots, p$; $r = 1, \dots, 2p$) mit reellen α_{jr}, β_{jr} sind diejenigen Bilinearformen $\sum_{r,s=1}^{2p} c_{rs} x_r y_s$ mit rationalen Koeffizienten, für die gilt $\sum_{r,s=1}^{2p} c_{rs} (\alpha_{mr} + \beta_{mr}i) (\alpha_{ns} + \beta_{ns}i) = 0$ für $m, n = 1, \dots, p$. Es wird bewiesen: Die Koeffizientenmatrizen (c_{rs}) der zu ω gehörigen symmetrischen und schiefsymmetrischen Riemannschen Formen sind identisch mit den rationalen Lösungen (ξ_{rs}) und (η_{rs}) zweier aus ω einfach herzuleitender linearer Gleichungssysteme mit reellen Koeffizienten.

Grell (Jena).

Hasse, Helmut: Zwei Bemerkungen zu der Arbeit „Zur Arithmetik der Polynome“ von U. Wegner in den Mathematischen Annalen, Bd. 105, S. 628—631. Math. Ann. 106, 455—456 (1932).

Vgl. dies. Zbl. 2, 380.

Hasse, H.: Gruppentheoretischer Beweis eines Satzes über gewisse Tripelsysteme. Norsk mat. Tidsskr. 13, 105—107 (1931).

Es werden Steinersche Tripelsysteme mit der folgenden Eigenschaft E betrachtet: mit drei Tripeln der Form $(ab u)$, $(bc v)$, $(uc x)$ kommt auch das Tripel $(av x)$ im System vor. Für solche Tripelsysteme hat Th. Skolem elementar bewiesen: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Steinerschen Tripelsystems mit der Eigenschaft E von N Elementen ist, daß N von der Form $2^n - 1$ ($n \geq 2$) ist. Ferner ist der Typus eines solchen Tripelsystems durch N völlig bestimmt. — Der Verf. gibt hierfür einen Beweis, der auf dem Basissatz für abelsche Gruppen beruht. Man adjungiert dem Steinerschen Tripelsystem von N Elementen mit der Eigenschaft E ein

weiteres Element, so daß man eine Menge G mit $N + 1$ Elementen erhält. Bei den gewählten Verknüpfungsrelationen ist G eine abelsche Gruppe, in der jedes von der Einheit verschiedene Element die Ordnung 2 hat, und nach dem Basissatz wird $N + 1 = 2^n$, und der Typus der Gruppe ist durch die Ordnung eindeutig bestimmt. Ebenso wird die Umkehrung bewiesen. Burckhardt (Basel).

Hasse, Helmut: Theory of cyclic algebras over an algebraic number field. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 171—214 (1932).

Eine normale einfache Algebra \mathfrak{A} über einem Zentrum Ω heißt zyklisch, wenn sie einen maximalen (kommutativen) Teilkörper Z hat, der über Ω zyklisch ist; \mathfrak{A} hat dann eine Basis $1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ über Z , wo u eine Größe aus \mathfrak{A} ist, die durch Transformation einen erzeugenden Automorphismus S der galoisschen Gruppe von Z/Ω ergibt: $u^{-1}zu = z^s$ für jedes z aus Z . Die Algebra ist (bis auf Isomorphismus) bestimmt, wenn der Wert von u^n gegeben ist, der eine von Null verschiedene Größe α aus Ω sein muß: $u^n = \alpha$. Man schreibt $\mathfrak{A} = (\alpha, Z, S)$. Für diese Algebren werden invariante Bestimmungsstücke gegeben (α, Z, S sind das nicht).

Solche Invarianten werden auf folgende Weise erhalten: Das Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, Z}{p}\right)$ ist für jede Primstelle p von Ω eine Potenz von S : $\left(\frac{\alpha, Z}{p}\right) = S^{r_p}$. Die Restklassen dieser r_p modulo

n sind Invarianten von \mathfrak{A} , d. h. zwei zyklische Algebren vom Range n^2 über Ω sind dann und nur dann isomorph, wenn sie in den entsprechenden r_p mod. n übereinstimmen. Mit den gleichen Mitteln läßt sich die Frage nach allen maximalen zyklischen Teilkörpern von \mathfrak{A} lösen: Z (zyklisch vom Grad n über Ω) ist dann und nur dann in \mathfrak{A} enthalten, wenn für jedes p der Grad

der p -adischen Erweiterung Z_p über Ω_p — kurz der p -Grad von Z — ein Vielfaches von $\frac{n}{(n, r_p)}$ ist. Übrigens ist bloß für endlich viele p die Zahl $\frac{n}{(n, r_p)} \neq 1$. Eine Algebra \mathfrak{A} heißt zyklisch dar-

stellbar, wenn sie einer zyklischen Algebra \mathfrak{A}' ähnlich ist, d. h., wenn \mathfrak{A}' und \mathfrak{A} die gleiche Divisions-

algebra enthalten. Führt man an Stelle der r_p mod. n die Restklassen von $\frac{r_p}{n} \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}}{p}\right)$ mod. 1 ein, so hat man Invarianten im Sinne der Ähnlichkeit: \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind dann und nur dann ähnlich, wenn sie in den $\frac{r_p}{n}$ mod. 1 übereinstimmen; die $\frac{r_p}{n}$ sind also Invarianten der zyklischen

Algebrenklassen. Der reduzierte Nenner m_p von $\frac{r_p}{n}$ heißt der p -Index der Klasse von \mathfrak{A} . Ein zyklischer Körper Z/Ω ist dann und nur dann in einer zu \mathfrak{A} ähnlichen Algebra als maximaler Teilkörper enthalten, also Zerfällungskörper der Klasse von \mathfrak{A} , wenn für jedes p der p -Grad von Z ein Vielfaches des p -Index der Klasse von \mathfrak{A} ist. Ferner gilt: Die Multiplikation der zyklischen

Algebrenklassen geschieht durch Addition der Invarianten: $\left(\frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'}{p}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}}{p}\right) + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{p}\right)$ mod. 1.

Und: jede zyklisch darstellbare Algebra ist zyklisch (ein Satz, der vor kurzem ergänzt wurde durch das abrundende Resultat: jede Algebra über einem algebraischen Zahlkörper ist zyklisch). Ferner wird der (für allgemeine Grundkörper nicht richtige) Satz bewiesen: der Index einer zyklischen Algebra (Grad der zugehörigen Divisionsalgebra) ist gleich ihrem Exponenten in der Brauerschen Gruppe der Algebrenklassen. — Der Arbeit ist eine Darstellung der von E. Noether entwickelten Theorie der verschränkten Produkte vorangeschickt. Wenn eine Algebra \mathfrak{A} über einem Körper Ω einen maximalen Teilkörper Z enthält, der über Ω galoissch ist, so gibt es eine Basis u_{s_1}, \dots, u_{s_n} von \mathfrak{A} über Z , die aus n den Elementen S_i der galoisschen Gruppe \mathfrak{G} von Z/Ω zugeordneten Größen u_s besteht. u_s erzeugt durch Transformation den Automorphismus S : (1) $u_s^{-1}zu_s = z^s$ für jedes z aus Z . Und es ist (2) $u_s u_{s'} = u_{s's} a_{s', s}$ mit gewissen Faktoren (3) $a_{s', s} \neq 0$ aus Z . — \mathfrak{A} heißt dann das verschränkte Produkt von Z mit \mathfrak{G} mit dem Faktorensystem $a_{s', s}$. Erklärt man umgekehrt einen Ring über Z mit einer den Relationen (1), (2), (3) und der aus dem Assoziativgesetz entspringenden Regel (4) $a_{s', s}^v a_{s', s} u_{s', s} v = a_{s', s} u_{s', s} v$ genügenden Basis u_{s_1}, \dots, u_{s_n} , so erhält man eine über Ω normale einfache Algebra \mathfrak{A} . — Die Transformatoren u_s sind durch die S nur bis auf von Null verschiedene Faktoren c_s bestimmt. Zu neuen Transformatoren $u'_s = u_s c_s$ gehört das neue Faktorensystem

$$a'_{s', s} = a_{s', s} \frac{c_{s'} c_s^T}{c_{s' s}},$$

$a'_{s', s}$ und $a_{s', s}$ heißen assoziiert. Zu einer Klasse \mathfrak{K} ähnlicher Algebren mit dem Zerfällungskörper Z gehört also eine Klasse K assoziierter Faktorensysteme. K bestimmt umgekehrt \mathfrak{K} . Das gliedweise Produkt $a_{s', s} \cdot b_{s', s} = d_{s', s}$ zweier Faktorensysteme zum Körper Z ist wieder eines, und zwar gehört es zum Produkt der Algebrenklassen, denen $a_{s', s}$ und $b_{s', s}$ zugeordnet sind. Die Klassen assoziierter Faktorensysteme bilden demnach eine Gruppe, die zur Brauer-

schen Gruppe der Algebrenklassen mit dem Zerfällungskörper Z isomorph ist. — Außerdem werden noch einige Sätze von Brauer über die Gruppe der Algebrenklassen bewiesen und die Spezialisierung auf den Fall eines zyklischen Z/Ω durchgeführt, die eben zu den zyklischen Algebren führt. *Deuring* (Leipzig).

Dorroh, J. L.: Concerning adjunctions to algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 85—88 (1932).

Ein beliebiger nichtkommutativer Ring kann immer als zweiseitiges Ideal in einen Ring mit Einselement der Multiplikation eingelagert werden. Ist in der additiven Gruppe eines Ringes \mathfrak{R} jedes Element $\neq 0$ von unendlicher Ordnung, so läßt sich \mathfrak{R} als Unterring in einen Ring \mathfrak{S} einlagern, der zu jedem seiner Elemente b und jeder natürlichen Zahl n ein Element c enthält, dessen n faches gleich b wird, und \mathfrak{S} läßt sich als zweiseitiges Ideal einbetten in einen Ring \mathfrak{T} , der den Körper der Rationalzahlen umfaßt. *Grell* (Jena).

Ingraham, M. H.: Note on the reducibility of algebras without a finite base. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 100—104 (1932).

Sätze und Beispiele über Eindeutigkeit und Endlichkeit direkter Summenzerlegungen von Ringen. *Grell* (Jena).

Schmidt, Friedrich Karl: Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen **62**, 267—284 (1931).

Es sei K ein Körper von algebraischen Funktionen einer Veränderlichen z mit endlichem Koeffizientenkörper k und es sei m ein Divisor in K . Ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper \bar{K} von K heißt Klassenkörper zu einer mod m erklärten Gruppe H von Divisoren in K , wenn die Normen der zu m primen Divisoren von K in H fallen und der Grad $(\bar{K}:K)$ gleich dem Index von H ist. In vollständiger Analogie zur Takagischen Klassenkörpertheorie werden nun der Existenz- und Eindeutigkeitssatz, der Isomorphiesatz, der Führer-Diskriminantensatz und der Umkehrsatz bewiesen. Die Beweismethoden sind die der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie, wobei die Untersuchung der Einheiten sich naturgemäß viel einfacher gestaltet, während die Bestimmung der Residuen der L -Reihen sich auf den vom Verf. (Math. Z. **33**) zuerst für diesen Fall bewiesenen Riemann-Rochschen Satz stützt. *van der Waerden* (Leipzig).

Chevalley, Claude: La structure de la théorie du corps de classes. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 766—769 (1932).

Neuer Beweis des Umkehrsatzes der Klassenkörpertheorie. Die Anordnung der Überlegungen ist wie folgt: K sei abelsch über dem Grundkörper k . Die K zugeordnete „Artingruppe“ H in k ist die Gruppe aller zur Diskriminante von K/k primen Ideale α in k , für die das Artinsymbol (K/α) gleich 1 ist. Von dieser Gruppe ist nachzuweisen, daß sie eine Idealgruppe im Weberschen Sinn ist (daß sie also einen Strahl nach einem passenden Modul enthält) und daß K Klassenkörper zu ihr ist. Das Zerlegungsgesetz für K , d. h., daß der Relativgrad der Primteiler eines k -Primideals \mathfrak{p} gleich dem Exponenten der niedrigsten Potenz von \mathfrak{p} ist, welche in H fällt, ergibt sich aus der Definition von H . Ebenso ist unmittelbar aus der Definition von H klar, daß die Faktorgruppe der Gruppe A der zur Diskriminante von K/k primen Ideale von k nach H mit einer Untergruppe der galoisschen Gruppe \mathfrak{G} von K/k isomorph ist. Demnach wird der Isomorphiesatz bewiesen sein, wenn man zu jedem Element σ von \mathfrak{G} ein Ideal α aus k mit $(K/\alpha) = \sigma$ nachweisen kann. Durch die schon von Artin beim Beweis des Reziprozitätsgesetzes benutzte Methode der Durchkreuzung mit Kreiskörpern gelingt es, diesen Nachweis zurückzuführen auf den entsprechenden Nachweis für einen relativzyklischen Kreiskörper von Primzahlpotenzgrad — für diesen Fall ist dieser Nachweis aber bekanntlich ganz einfach. Der nun noch zu erbringende Beweis dafür, daß H den Strahl nach einem gerade aus den in K verzweigten k -Primteilern bestehenden Modul enthält, wird verbunden mit dem Beweis dafür, daß H aus den Strahlklassen nach diesem Modul besteht, welche Normen von Idealen aus K enthalten (Takagische

Definition des Klassenkörpers). Diese beiden Beweise werden zunächst auf den zyklischen Fall reduziert und dann wieder mit der Durchkreuzungsmethode zu Ende gebracht. Mit ihrer Hilfe wird nämlich zunächst gezeigt, daß H in der erwähnten Normklassengruppe enthalten ist — unter der Voraussetzung, daß die Behauptung für relative Kreiskörper gilt —; da sich nach den Methoden von Takagi der Index der Normklassengruppe als mindestens so groß wie der Index von H erweist, so ergibt sich die Behauptung. Alles ist daher auf den Nachweis zurückgeführt, daß die Artingruppe eines relativen Kreiskörpers einen Strahl enthält. Das folgt aus dem allgemeinen Satz von der arithmetischen Progression, sogar schon aus einer schwächeren Aussage. Es sei noch erwähnt, was wohl klar ist, daß bei diesem Beweis des Umkehrsatzes der Isomorphiesatz gleich in der endgültigen Gestalt des Artinschen Reziprozitätsgesetzes zum Vorschein kommt.

Deuring (Leipzig).

Thébault, V.: Sur les carrés parfaits. *Gaz. mat.* **37**, 41—44 (1931).

Florescu, Ioan B.: Über die ganzzahligen Lösungen einer homogenen Gleichung zweiten Grades mit n Veränderlichen. *Gaz. mat.* **37**, 45—48 (1931) [Rumänisch].

Ionescu, I.: Teilbarkeit numerischer Determinanten. *Gaz. mat.* **37**, 124—127 (1931) [Rumänisch].

Pall, Gordon: A class of universal functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**, 56—58 (1932).

Ein Polynom heißt universal, wenn es für ganzzahlige Werte der Variablen alle ganzen positiven und negativen Zahlen darstellt. Beweis des Satzes:

$$f(x, y) = axy + bx + cy + d,$$

a, b, c, d ganz, $a \neq 0$, ist dann und nur dann universal, wenn entweder b (oder c) $\equiv \pm 1 \pmod{a}$ oder $a = 6$, $b \equiv 3$, $c \equiv \pm 2 \pmod{6}$. Ist $b \equiv \pm 1 \pmod{a}$, so ist $b = \pm 1 + Ba$ und $f(x_1 - B)$ ist universal; daher auch $f(x, y)$. Weiter ist

$$6xy \pm 3x \pm 2y + 1 = (3x \pm 1)(2y \pm 1)$$

universal. Die Bedingungen sind also hinreichend. Für den zweiten Teil des Beweises wird die Form f durch die Substitution $x, x + h$ und $y, y + k$ und eventuellen Zeichenwechsel reduziert zu einer Form, worin $a > 0$, $0 \leq b \leq \frac{1}{2}a$, $0 \leq c \leq \frac{1}{2}a$, $d = 0$. Für $a = 1, 2, 3, 4$ wird die Richtigkeit des Satzes leicht bewiesen. Für $a \geq 5$, $b \geq c \geq 2$, $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$ ist $|axy + bx + cy| \geq 2a$. Für $x, y = -1, 0, 1$ kann nur $a - b - c = 1$ und $c = 2$ sein. Also $a = 5$, $b = c = 2$ oder $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$; im ersten Fall ist die Form nicht universal, denn sie stellt die Zahl 3 nicht dar.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Mahler, Kurt: Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. II. *J. reine angew. Math.* **166**, 137—150 (1932).

Die in dem Referat von I (vgl. dies. Zbl. **3**, 151) zitierten Sätze über das Transzendenzmaß von π und über die algebraische Unabhängigkeit von $\log p/q$ und eine beliebige Liouville-Zahl werden hier bewiesen. Es gilt der Satz: Sei $z \neq 0$ entweder der reelle Logarithmus einer positiven rationalen Zahl oder die Zahl $2\pi i$. Dann gibt es hierzu eine positive Konstante $c > 1$ und zu jeder natürlichen Zahl q eine weitere positive Konstante $C(q)$, so daß jede Näherungsform

$$R = A_0 + A_1 z + \dots + A_q z^q; \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \dots, |A_q|) \geq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geq C(q) A^{-c^q}$$

genügt. — Im Gegensatz zu den Beweisen von Teil I wird jetzt $q_1 = q_2 = \dots = q_m = q$ festgehalten, während m über alle Grenzen wächst. *J. F. Koksma* (Hilversum).

Bohr, Harald, und Børge Jessen: Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion. II. Mitt.: Das Verhalten der Funktion im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$. Acta math. (Uppsala) 58, 1–55 (1932).

Es werden untersucht: der Wertevorrat $M(\sigma_0)$ von $\log \zeta(s)$ auf senkrechten Geraden $\sigma = \sigma_0$ ($\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$) und der Wertevorrat $M(\sigma_1, \sigma_2)$ von $\log \zeta(s)$ in senkrechten Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ($\frac{1}{2} < \sigma_1 \leq 1$, $\sigma_1 < \sigma_2$). Hierbei hat man sich die Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ von den singulären Stellen des $\log \zeta(s)$ wagerecht bis zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ aufgeschnitten zu denken — Gebiet G — und $\log \zeta(s)$ bedeutet den in G regulären, für $\sigma > 1$ durch Logarithmierung des Eulerschen Produktes gegebenen Zweig

$$(1) \quad \log \zeta(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-s})$$

(die $\log(1 - p_n^{-s})$ Hauptwerte). Bei $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1, \sigma_2)$ sind nur die in G liegenden Teile der Geraden $\sigma = \sigma_0$ und der Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ zu berücksichtigen. Hauptsätze: I. „Es gibt eine (von σ_0 abhängige) in der $z = u + iv$ -Ebene positive und stetige Funktion $F(z)$, deren Doppelintegral über die ganze Ebene Eins ist, von folgender Beschaffenheit: Ist $R(u_1 < u < u_2, v_1 < v < v_2)$ ein beliebiges achsenparalleles Rechteck in der z -Ebene und bezeichnet $L(T)$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $-T < t < T$, in denen $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ vorhanden ist und in R liegt, so gilt

$$(2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T)}{2T} = W(R) = \iint_R F(z) du dv.$$

(Bekannt war, nach Bohr, daß $M(\sigma_0)$ in der ganzen Ebene dicht liegt.) II. „Für beliebiges komplexes a bezeichne $N_a(T)$ die Anzahl der (in ihrer Vielfachheit gezählten) a -Punkte von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil von G , der dem Rechteck $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$ angehört. Dann ist der Grenzwert $G(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_a(T)}{2T}$ vorhanden und stellt eine überall positive, in σ_1 und σ_2

stetige Funktion von a dar.“ (Bekannt war, nach Bohr, daß die obere Unbestimmtheitschranke von $N_a(T)/2T$ endlich, die untere positiv ist, daß also insbesondere $M(\sigma_1, \sigma_2)$ die ganze Ebene bedeckt.) Das Kennzeichnende an den obigen Ergebnissen ist, daß $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1, \sigma_2)$ nicht lediglich als Punktmengen, sondern als Träger gewisser Dichtefunktionen (Wahrscheinlichkeiten) aufgefaßt werden: $F(z)$ (ist durch (2) eindeutig bestimmt), $W(R)$ und $G(a)$ können als Wahrscheinlichkeiten dafür gedeutet werden, daß $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ in die Nähe von z kommt, daß $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ nach R gelangt und daß $\log \zeta(s)$ in $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ den Wert a annimmt. Die Beweise von I und II, namentlich der von II, gehören zu den schwierigsten in der ganzen Zetalehre. Zunächst einmal liegt es daran, daß man keinen handlichen Ausdruck besitzt, der $\log \zeta(s)$ in G darstellt. In der ersten gleichnamigen Abhandlung, wo die betreffenden Fragestellungen für $\sigma_0 > 1$, $\sigma_2 > \sigma_1 > 1$ untersucht wurden, ist der Ausdruck (1) gut brauchbar; hier dagegen scheint er vollkommen zu versagen. Nun hatte aber Bohr gezeigt, wie man sich ein gewisses Verhalten der Abschnitte

$$(3) \quad F_N(s) = - \sum_{n=1}^N \log(1 - p_n^{-s})$$

zunutze machen kann, um $\log \zeta(s)$ in G zu untersuchen. Dieser Ansatz wird hier noch beträchtlich ausgebaut und durch eine Reihe weiterer Überlegungen ergänzt. Es ergeben sich so einige Hilfssätze, die auch für sich sehr bemerkenswert sind. Die (vielleicht gar nicht vorhandenen) Nullstellen von $\zeta(s)$ in $\sigma > \frac{1}{2}$ sind jedenfalls so dünn verteilt, daß sie nicht wesentlich stören. Ein weiterer schon älterer Gedanke Bohrs besteht darin, die Abschnitte (3) auf $\sigma = \sigma_0$ mit den Funktionen

$$(4) \quad S_N(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = - \sum_{n=1}^N \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \theta_n})$$

der N unabhängigen reellen Veränderlichen $\theta_1, \dots, \theta_N$ durch den Kronecker-Weylschen Satz in Verbindung zu setzen. Der große Fortschritt bei I wird freilich erst durch eine neuere Untersuchung der beiden Verff. (1929) ermöglicht, in der im Rahmen einer allgemeinen Theorie der konvexen Kurven sehr weitgehende Sätze über die Funktionen (4) gewonnen werden. Beim Beweise von II wird I benutzt. Es stehen hier sehr umständliche funktionentheoretische Betrachtungen im Vordergrund. Die Ausdrücke (4) kommen, mit s statt σ_0 , auch vor, wenn auch nur nebenbei; freilich kann man, wie die Verff. am Schluß betonen, gerade diese Funktionen zum Ausgangspunkte der Betrachtungen nehmen und mit ihrer Hilfe für die Abschnitte $F_N(s)$ zu einer dem $G(a)$ entsprechenden Wahrscheinlichkeit $G_N(a)$ gelangen, die mit wachsendem N gegen $G(a)$ strebt. Für den Beweis von I ist dieser Weg (über (4) zu den bei $F_N(\sigma_0 + it)$ auftretenden $W_N(R)$, die gegen $W(R)$ streben) schon von vornherein gewählt worden. Geht man von $\log \zeta(s)$ zu $\zeta(s)$ selbst über, so ergeben I, II und die beiden entsprechen-

den Sätze der ersten gleichnamigen Abhandlung: Ia), „Zu jedem $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ gibt es in der $z = u + iv$ -Ebene eine stetige Funktion $F^*(z)$, die für $\sigma_0 > 1$ nicht negativ, für $\sigma \leq 1$, $z \neq 0$ positiv ist, von folgender Beschaffenheit: Ist $R(u_1 < u < u_2, v_1 < v < v_2)$ ein beliebiges achsenparalleles Rechteck in der z -Ebene und bezeichnet $L^*(T)$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $-T < t < T$, in denen $\zeta(\sigma_0 + it)$ dem Rechteck R angehört, so gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L^*(T)}{2T} = \iint_R F^*(z) du dv.$$

IIa) „Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2$ und a für $\sigma_1 > 1$ ein von $\zeta(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ angenommener Wert, für $\sigma_1 \leq 1$ eine beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl. Ferner bezeichne $N_a^*(T)$ die Anzahl der (in ihrer Vielfachheit gezählten) a -Punkte von $\zeta(s)$ im Rechteck $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2, -T < t < T$. Mit wachsendem T strebt dann $\frac{N_a^*(T)}{2T}$ gegen eine endliche positive Zahl.“ (Für $a = 0$ ist nach Bohr-Landau dieser Grenzwert zwar auch vorhanden, aber gleich Null.)
A. Walfisz (Radošć).

Analysis.

Gallina, G.: *Sulle funzioni omogenee*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 561–566 (1931).

Im Anschluß an einen Aufsatz von del Chiaro (dieselben Atti, VI. s. 13, 475–477; vgl. dies. Zbl. 2, 23) wird das allgemeine Integral der Eulerschen Differentialgleichung für die homogenen Funktionen $p_1 x_1 + \dots + p_r x_r - n f = 0$ (wo p_1, \dots, p_r die partiellen Ableitungen bedeuten) untersucht. Jedes solche Integral genügt für positive Werte von t der Gleichung (3) $f(tx_1, \dots, tx_r) = t^n f(x_1, \dots, x_r)$, liefert also in seinem ganzen Existenzbereich eine positive homogene Funktion. Damit die Beziehung (3) auch für negative t richtig bleibe, muß der Exponent n ein Bruch mit ungeradem Nenner und die Funktion f gerade oder ungerade sein, je nachdem der Zähler von n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Gehört der Ursprung zum Existenzbereich der Funktion f , so muß sie dort Null und der Exponent n eine positive Zahl sein. — Nennt man Γ den Inbegriff aller Wertsysteme (x_1, \dots, x_r) mit endlichen Werten x , ausgenommen $(0, \dots, 0)$, I den Inbegriff aller Wertsysteme (x_1, \dots, x_r) , wo aber von allen proportionalen Systemen immer nur eines (das nach Belieben ausgewählt wird) beibehalten wird, so gilt: Eine homogene Funktion ist in (x_1, \dots, x_r) stetig und differenzierbar nach der „Geraden“, die (x_1, \dots, x_r) mit $(0, \dots, 0)$ verbindet. Wenn eine Funktion $f(x_1, \dots, x_r)$ im Feld I für jeden von 0 verschiedenen Wert t der Gleichung (3) genügt, so ist sie eine homogene Funktion vom Grade n . Wenn eine homogene Funktion vom Grade n in allen Punkten von I die partielle Ableitung nach einer der Veränderlichen besitzt, so besitzt sie auch in allen Punkten von Γ die partielle Ableitung nach dieser Veränderlichen, und diese Ableitung ist selbst eine homogene Funktion, und zwar vom Grade $n - 1$. Ist eine homogene Funktion in allen Punkten von I differenzierbar, so ist sie auch in allen Punkten von Γ differenzierbar und genügt in allen diesen Punkten der Eulerschen Differentialgleichung.
L. Schrutka (Wien).

Mitra, S. C.: *Some definite integrals involving the parabolic cylinder functions*. J. Indian Math. Soc. 19, 115–118 (1931).

Wall, H. S.: *On the expansion of an integral of Stieltjes*. Amer. Math. Monthly 39, 96–107 (1932).

Das von Stieltjes betrachtete Integral

$$F(z, \lambda) = \int_0^\infty \frac{(1-\lambda) e^{-zu}}{e^{(1-\lambda)u} - \lambda} du$$

besitzt eine asymptotische Entwicklung

$$F(z, \lambda) \sim \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots,$$

wobei

$$c_\kappa = c_\kappa(\lambda) = a_{\kappa 0} + a_{\kappa 1} \lambda + \dots + a_{\kappa \kappa-1} \lambda^{\kappa-1}.$$

Der Verf. untersucht die arithmetischen Eigenschaften der Konstanten a_{uv} . Für $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ ergeben sich Beziehungen zu den Potenzreihen von $\operatorname{tg} x$ und $\sec x$.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Karamata, J.: Über einen Satz von Vijayaraghavan. Math. Z. **34**, 737—740 (1932).

Beweis der folgenden Sätze: I. Es sei $A(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem Intervall $(0, T)$ und

$$I(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d[A(t)]$$

existiere für jedes $s > 0$. Aus $I(s) = O(1)$ bei $s \rightarrow 0$ und $A(t) - A(x) \geq -w(\lambda)$ für jedes $x > 0$ und $x < t \leq x\lambda$, $\lambda > 1$, folgt $A(x) = O(1)$ bei $x \rightarrow \infty$. II. Voraussetzung über $A(t)$ und Existenz von $I(s)$ wie in I. Es sei $g(x)$ stetig und positiv in $(0, \infty)$ und $g(2x) = O[g(x)]$ bei $x \rightarrow \infty$. Aus $I(s) = O[g(1/s)]$ bei $s \rightarrow 0$, und $A(t) - A(x) \geq -w(\lambda)g(x)$ für jedes $x > 0$ und $x < t \leq x\lambda$, $\lambda > 1$, folgt dann $A(x) = O[g(x)]$ bei $x \rightarrow \infty$. — Der Satz von Vijayaraghavan [J. London Math. Soc. **1**, 113—120 (1926)] ist ein Spezialfall von I.

Hille (Princeton, N. J.).

Kantorovič, L.: Quelques observations sur l'approximation de fonctions au moyen de polynômes à coefficients entiers. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **9**, 1163—1168 (1931) [Russisch].

En désignant par E_n la meilleure approximation d'une fonction bornée $f(x)$ sur le segment $(\alpha, 1 - \alpha)$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$) au moyen de polynômes de degré n , et par E_n^e la meilleure approximation de cette même fonction au moyen de polynômes de degré n et à coefficients entiers, on obtient l'inégalité

$$E_n^e = E_n + O[(1 - \alpha)^n].$$

Dans le cas limite où il s'agit du segment $(0, 1)$ ($\alpha = 0$), pour que l'on ait $\lim E_n^e = 0$, les valeurs $f(0)$ et $f(1)$ doivent être entières. Ceci admis, ainsi que la continuité de la fonction $f(x)$, on a, pour le segment considéré:

$$E_n^e \leq 2 E_n + O(1/n).$$

En général, l'ordre $O(1/n)$ ne se laisse pas abaisser. — Le sujet en question a été traité par M. S. Bernstein dans les C. R. Acad. Sci. URSS **1930**, 411. L'auteur s'appuie sur la représentation des polynômes sous la forme de M. Bernstein:

$$P(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m (1-x)^{n-m}. \quad W. Gontcharoff (Charkow).$$

Achiezer, N.: Sur un problème de minimum de la théorie des fonctions et sur le nombre de racines d'une équation algébrique situées à l'intérieur du cercle de rayon un. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **9**, 1169—1189 (1931) [Russisch].

L'auteur donne une démonstration nouvelle des théorèmes de Carathéodory-Fejér et de G. Pick relatifs à la limite supérieure du module d'une fonction régulière $f(z)$ à l'intérieur du cercle de rayon 1, lorsque les $n + 1$ premiers coefficients de son développement de Taylor au centre ou bien ses valeurs en $n + 1$ points intérieurs au cercle sont donnés. Il obtient ces résultats comme cas particuliers des théorèmes analogues, où la fonction $f(z)$ au lieu d'être régulière peut posséder un nombre donné p de pôles à l'intérieur du cercle, qu'il démontre par des considérations élémentaires. Il en tire ensuite le théorème de Schur-Cohn sur le nombre de racines de module inférieur à un d'une équation algébrique.

S. Bernstein (Charkow).

Egerváry, E.: Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome. Math. Z. **34**, 741—757 (1932).

Es handelt sich um Extremalprobleme im Bereiche der nichtnegativen (passend normierten) harmonischen Polynome n -ter Ordnung. Auf Grund einer von L. Fejér

und F. Riesz herrührenden Parameterdarstellung kommt es auf die Lösung zugehöriger charakteristischer Gleichungen an (vgl. Egerváry und Szász, Math. Z. 27, 641—652). Dem Verf. gelingt die Lösung in einem interessanten Spezialfall. Außerdem verallgemeinert er einen verwandten Satz von S. Bernstein. Szász (Frankfurt a. M.).

Riesz, Frédéric: Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood. J. London Math. Soc. 7, 10—13 (1932).

$f(x)$ sei eine im Intervall $0 < x \leq a$ nicht negative meßbare Funktion, $m(y)$ das Maß der x -Menge mit $f(x) > y$. Dann gibt es eine im wesentlichen eindeutig bestimmte monoton abnehmende Funktion $f^*(x)$ mit demselben $m(y)$. — Es sei $A(f; x, \xi)$

$$= \frac{1}{x - \xi} \int_{\xi}^x f(x) dx \quad (0 \leq \xi < x) \text{ und } \theta(f; x) \text{ die obere Grenze von } A(f; x, \xi) \text{ für festes } x$$

und zwischen 0 und x variables ξ . Es wird bewiesen:

$$\theta^*(f; x) \leq \theta(f^*; x).$$

Hierin ist die folgende Ungleichung von Hardy und Littlewood [Acta math. 54, 81—116 (1930)] enthalten:

$$\int_0^a s(\theta(f; x)) dx \leq \int_0^a s(\theta(f^*; x)) dx,$$

bei jeder für $t > 0$ monoton wachsenden Funktion $s(t)$. W. Fenchel (Göttingen).

Tortorici, P.: Sui massimi e minimi delle funzioni convesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 472—474 (1931).

Es werden die folgenden sehr einfachen Sätze über beschränkte konvexe Funktionen, die in einem konvexen Bereich Ω_n des n -dimensionalen Raumes definiert sind, bewiesen: 1. Ist eine solche Funktion in keinem k -dimensionalen konvexen Teilbereich von Ω_n konstant, so nimmt sie ihr Minimum in höchstens k linear unabhängigen Punkten an. 2. Nimmt eine solche Funktion ihr Minimum am Rande von Ω_n an, so tut sie dies auch in jedem Teilbereich von Ω_n . (Für das Maximum ist dies ganz trivial.)

W. Fenchel (Göttingen).

Montel, Paul: Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sougharmoniques. Prakt. Akad. Athénōn 6, 374—385 (1931).

Der Begriff der konvexen Funktion läßt sich in verschiedener Weise auf Funktionen mehrerer Variabler übertragen. Verf. beschäftigt sich mit Funktionen $f(x, y)$, die bei Festhaltung einer Variablen konvexe Funktionen der anderen sind. Diese Funktionen werden zweifach konvex genannt. In einer früheren Arbeit ist bewiesen worden, daß zweifach konvexe Funktionen subharmonisch sind. Hier wird gezeigt, daß eine solche Funktion stetig von beiden Variablen abhängt. (Daß sie stetige Funktion jeder einzelnen ist, folgt unmittelbar aus der Definition.) — Die Menge der subharmonischen Funktionen, die Menge der stetigen subharmonischen Funktionen, die Menge der zweifach konvexen Funktionen und die Menge der konvexen Funktionen [d. h. der Flächen $z = f(x, y)$, die von jeder zur z -Achse parallelen Ebene in einer konvexen Kurve geschnitten werden] haben die folgenden Eigenschaften. Jede der Mengen ist in der vorhergehenden enthalten, was unmittelbar aus den erwähnten Ergebnissen folgt. Jede der Mengen ist in dem Sinne abgeschlossen, daß eine endliche oder konvergente unendliche Summe von Funktionen der Menge wieder zur Menge gehört. — Es folgen einige Sätze über Funktionen von mehr als 2 Variablen, die in bezug auf gewisse Variablengruppen subharmonisch sind. Schließlich wird ein sehr einfacher von Pólya herrührender Beweis dafür angegeben, daß $\varphi[U(x, y, z)]$ subharmonisch ist, wenn φ konvex und U harmonisch ist. Die Umkehrung, daß aus $\varphi[U(x, y, z)]$ subharmonisch und U harmonisch die Konvexität von φ folgt, wird nach Saks [C. R. 187, 276 (1928)] bewiesen.

W. Fenchel (Göttingen).

Prasad, B. N.: A new theorem on the representation of a function by Fourier's single integral. J. London Math. Soc. **7**, 36—38 (1932).

Über die Gültigkeit der Fourierschen Integralformel wird folgendes gezeigt: Wenn $f(x)$ in jedem endlichen Intervall L -integrierbar ist, wenn eine der hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz einer Fourierschen Reihe an einer Stelle x zur Summe

$\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ erfüllt ist und wenn $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ außerhalb eines genügend großen Intervalls von beschränkter Schwankung ist, dann ist

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin u(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\},$$

R. Schmidt (Kiel).

Cossar, J.: A note on Fourier integrals. J. London Math. Soc. **7**, 38—46 (1932).

Die Konvergenz von $\int_a^\infty f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0$ mit $\lambda \rightarrow \infty$ wird unter Voraussetzungen bewiesen, die weiter sind als diejenigen, die von Hobson [Proc. London Math. Soc., II. s. **6**, 348—395 (1908)], Pringsheim [Math. Ann. **68**, 367—408 (1910)] und Prasad (vorst. Ref.) angegeben wurden.

R. Schmidt (Kiel).

Rogosinski, Werner: Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen. Math. Z. **35**, 93—121 (1932).

Hauptgegenstand der Arbeit bildet die Klasse \mathfrak{S} der im Einheitskreise $0 \leq r < 1$ konvergenten und in seiner oberen Hälfte $0 < \varphi < \pi$ positiven harmonischen Sinus-entwicklungen

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi \cdot r^n. \quad (a_1 = 1)$$

Verf. zeigt, daß man \mathfrak{S} durch eine einfache, aber nicht triviale Überlegung auf die Klasse der im Einheitskreise konvergenten und dort positiven harmonischen Entwicklungen

$$u(r, \varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi) r^n$$

zurückführen kann, ohne daß \mathfrak{S} dadurch an selbständigem Interesse verlöre. — Der Klasse \mathfrak{S} entspricht die Klasse der in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (a_1 = 1, z = re^{i\varphi})$$

mit reellen a_n , die in der oberen Hälfte des Einheitskreises einen positiven Imaginärteil besitzen. Die selbständige Bedeutung der Klasse \mathfrak{S} liegt nun darin, daß sie sich noch anders kennzeichnen läßt: Sie besteht aus genau denjenigen $f(z)$, die in $|z| < 1$ für reelle z und nur für diese reellwertig sind. — Als Hauptergebnis gewinnt Verf. eine Bestimmung des Bereiches der Koeffizienten a_2, a_3, \dots , die dem Carathéodoryschen Hauptsatz [Math. Ann. **64**, 95—115 (1907); Rend. Circ. mat. Palermo **32**, 193—217 (1911)] genau analog ist; der Beweis wird durch die Transformation $g(z) = f(z) \cdot \frac{1-z^2}{z}$ auf den Carathéodoryschen Hauptsatz zurückgeführt. Ferner wird die Toeplitzsche [Rend. Circ. mat. Palermo **32**, 191—192 (1911)] Charakterisierung des Carathéodoryschen Koeffizientenbereiches analogisiert. *R. Schmidt* (Kiel).

Hirst, Kenneth A.: On the second theorem of consistency in the theory of summation by typical means. Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 353—366 (1932).

Die Hardysche Erweiterung [Proc. London Math. Soc., II. s. **15**, 72—88 (1916)] des sog. zweiten Permanenzsatzes (theorem of consistency) für Rieszsche Mittel (Hardy-Riesz, The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Math. Tracts **18**, 30—32) wird verschärft.

R. Schmidt (Kiel).

Bosanquet, L. S.: On strongly summable Fourier series. J. London Math. Soc. 7, 47—52 (1932).

Notation: $f(t)$ is integrable Denjoy (Lebesgue in Th. IV); $s_n(\bar{s}_n)$ is the n th partial sum of the Fourier series (conjugate series) of $f(t)$ at $t = x$.

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}; \quad \psi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\}.$$

$R(\alpha, \beta)$ is the method of summation introduced by Bosanquet and Linfoot (generalization of the Cesàro-Riesz means on the logarithmic scale). — The following

theorems are proved: I. If $\sum_0^n |s_m - s| = o(n)$, then $\varphi(t) = o(1)$ ($C, 1 + \delta$) as $t \rightarrow 0$

for every $\delta > 0$. — II. If $\sum_1^n |\bar{s}_m - s| = o(n)$, then $\psi(t) = o(1)$ ($C, 1 + \delta$). III. If

$\sum_0^n |s_m - s|^p = O(n)$ where $p \geq 1$, then either $\varphi(t) = o(1)$ ($C, 1 + \delta$) for every $\delta > 0$ [namely if and only if the Fourier series of $f(t)$ is summable (C, r), where $r > 1/p$] or this is false for every δ . — IV. If

$$\int_0^t |\varphi(u)|^p du = O(t)$$

where $p \geq 1$, then either $s_n - s = o(1)$ $R(0, 1 + \delta)$ for every $\delta > 0$ [namely if and only if $\varphi(t) = o(1)$ $R(r, q)$ where either $r > 1/p$ or $r = 1/p$, $q > (p-1)/p$] or this is false for every δ .

Hille (Princeton, N. J.).

Kienast, A.: Explicit formulae connecting Hölder's, Cesàro's and another mean value. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 1—17 (1932).

Neben den Cesàroschen und Hölderschen Mitteln betrachtet Verf. die Mittel $\sigma_n^{(k)} = (n+k)^{-1}(\sigma_1^{(k-1)} + \dots + \sigma_n^{(k-1)})$ und untersucht die Transformationen, die eine Art von Mitteln in eine der beiden anderen überführt, hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit durch explizite Formeln. Ebenso wird mit den Inversen der drei Arten von Mitteln verfahren.

R. Schmidt (Kiel).

Differentialgleichungen :

Buhl, A.: Sur une invariance d'intégrales doubles attachée à toute équation différentielle ordinaire du premier ordre. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 822—824 (1932).

Zu jeder linearen Differentialgleichung gibt es ein Flächenintegral, das denselben Wert hat für alle (geschlossenen) Flächen einer bestimmten, vom allgemeinen Integral der Gleichung abhängigen Schar.

Willy Feller (Kiel).

Schulz, Günther: Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. (Inst. f. Angew. Math., Univ. Berlin.) Z. angew. Math. Mech. 12, 44—59 (1932).

Die numerische Integration der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ wird in vielen Fällen am besten so ausgeführt, daß man zu gewissen, mit der Schrittweite h äquidistanten Abszissen x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) Näherungswerte y_i der zugehörigen Ordinaten ermittelt. Wenn man solche Ordinatenwerte bis zu y_n einschließlich bereits kennt, bekommt man den Näherungswert der folgenden Ordinate y_{n+1} aus der Formel

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx, \quad (A)$$

die unmittelbar aus der gegebenen Gleichung durch Integration hervorgeht. Um die in (A) bezeichnete Integration ausführen zu können, ersetzt man den Integranden durch ein Lagrangesches Polynom etwa vom Grade r , das an den Stellen $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-r}$, die Werte $f(x_n, y_n), f(x_{n-1}, y_{n-1}), \dots, f(x_{n-r}, y_{n-r})$ annimmt, sowie die linke Seite durch $y_{n+1} - y_n$; dann läßt sich zunächst y_{n+1} bestimmen und sodann kann man die Formel (A) auf den folgenden Schritt, nämlich von x_{n+1} bis x_{n+2} anwenden usw. Eine sehr zweckmäßige Art, die Rechnung anzuordnen ergibt sich aus der Anwendung eines Differenzenschemas der Werte y_i und einer von J. C. Adams (1883) angegebenen Formel, die also eine Näherungsformel für (A) ist. Eine brauchbare Fehlerabschätzung dieses „Verfahrens der fortlaufenden Extrapolation“ hat R. v. Mises (1930) gegeben.

G. Schulz ändert nun das Verfahren in der Weise ab, daß er bei der Aufstellung des Näherungspolynoms für den Integranden auch den gesuchten Wert y_{n+1} benutzt. Dann tritt diese Größe zwar auf beiden Seiten der Gleichung auf, läßt sich aber durch ein „Iterationsverfahren“ bestimmen und zwar genügen meistens zwei bis drei sukzessive Approximationen. Die Anwendung dieser Methode führt, wie zu erwarten, zu einer niedrigeren Fehlerschranke. Nach den Ausführungen von S. lohnt sich aber dieses „Verfahren der fortlaufenden Interpolation“ trotz des etwas vergrößerten Arbeitsaufwands. S. zeigt, wie sein Verfahren auch beim Beginn der Integration, d. h. zur Berechnung der ersten Werte y_i , die vor der Anwendung der Adamschen Formel bekannt sein müssen, angewandt werden kann und gibt Formeln zur Beurteilung der hierbei erreichten Genauigkeit. — Sowohl mit dem Adamschen als mit dem Schulzschen Verfahren prinzipiell übereinstimmende Methoden werden seit langem bei astronomischen Rechnungen gebraucht, wenn auch ohne exakte Fehlerabschätzung. *Nyström.*

Davis, H. T.: The Laplace differential equation of infinite order. *Ann. of Math.*, II. s. **32**, 686–714 (1931).

This paper considers the differential equation of infinite order with polynomial coefficients: $F(x, d/dx) u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^p a_{mn} x^m u^{(n)}(x) \right] = f(x)$. Solution of this equation is attempted by the Pincherle-Bourlet symbolic method, which depends upon the determination of an operator $X(x, d/dx)$ of the same type form as $F(x, d/dx)$ such that $X(x, d/dx) F(x, d/dx) = 1$, i. e. essentially a left hand resolvent. From

the law of composition: $X(x, z) \cdot F(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial^n F / \partial x^n) (\partial^n X / \partial z^n)$ it results

that $X(x, z)$ must satisfy a differential equation of the p th order in z . By setting $X(x, z) = e^{-xz} \bar{X}(z)$, the determination of $\bar{X}(z)$ is made to depend upon the solutions

of (A): $\sum_{m=0}^p A_m(z) X^{(m)}(z) = e^{xz}$, where $A_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^n$. This leads to the form

$$X(x, z) = e^{-xz} \left[\sum_{i=1}^p u_{i-1}(x) X_i(z) + \int_0^z e^{xt} W(z, t) dt \right]$$

where u_i are solutions of $F(x, d/dx) u(x) = x^i$, and W is the usual expression in terms of the solutions of the homogeneous equation corresponding to (A) and its adjoint. A second form of $X(x, z)$ expresses $u_{i-1}(x)$ in the form $U(x) - \int_{l_i} e^{xt} Y_i(t) dt$, where

$Y_i(t)$ are solutions of the homogeneous adjoint of (A), satisfying certain conditions along the curves l_i , and $U(x)$ is a solution of $F(x, d/dx) u(x) = 0$. A third form gives the part independent of $U(x)$ as power series in z . — The second part of the paper is a study of the grades of functions $f(x)$ when subject to transformations of the Laplace type, grade of $f(x)$ being $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}$. A typical result for functions of finite grade is:

if $F(x, z) = e^{-xz} \int_0^z e^{xt} Y(t) dt$, then $F(x, d/dx) f(x)$ is of grade q provided $f(x)$ is of grade q , and $Y(t)$ is analytic for $|q| \leq R > q$. For functions of infinite grade, results obtained are of the type: if $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n constants) is of grade F , and if $f(x) = g(x) h(x)$, with $g(x)$ of grade g , and $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n / x^n$, such that $\frac{1}{t} h\left(\frac{1}{t}\right)$ is of grade Q in t , then $F(d/dx) f(x)$ defines a series, Borel summable to

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{1}{t} h\left(\frac{1}{t}\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(x) F^{(n)}(-t)/n! \right] dt$$

for $Q + F \leq \Re(x) \leq R' < \infty$. *T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).*

Théodoresco, N.: Sur l'emploi de la méthode de M. Hadamard à la résolution du problème de Cauchy pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 583—585 (1932).

Die Hadamardsche Methode für das Cauchysche Problem überträgt sich mühelos auf ein hyperbolisches System

$$\sum_{h,k} \gamma_{ih}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} = \psi_i, \quad \begin{pmatrix} i, h = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, p \end{pmatrix}$$

wobei die ψ_i analytisch und die γ_{ih}^k Konstanten sind, und von den Matrizen $\gamma^k = \|\gamma_{ih}^k\|$ (i, h laufend) Vertauschungsrelationen vorausgesetzt werden: $\bar{\gamma}^h \gamma^k + \gamma^h \bar{\gamma}^k = 2 \delta^{hk} e$, e die Einheitsmatrix.

Willy Feller (Kiel).

Kourenskey, M.: L'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une inconnue et deux variables indépendantes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. **14**, 408—414 (1931).

Um eine Differentialgleichung der Form $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ zu integrieren, wird die Bedingung aufgesucht, unter der eine Gleichung $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const}$ mit der Differentialgleichung verträglich ist. Es ergeben sich die gleich Null gesetzten Determinanten 4. Ordnung einer vom Verf. in einer anderen Arbeit [Lincei Rend. **10**, 148—154 (1929)] aufgestellten Matrix. — Hierauf werden die speziellen Differentialgleichungen $F(x, y, z, p, q, r, t) = 0$, $F(x, y, z, p, q, s, t) = 0$, $F(x, y, z, p, q, r, s) = 0$, $F(x, y, z, p, q, t) = 0$ und $F(x, y, z, p, q, s) = 0$ nacheinander untersucht und gezeigt, in welcher Weise man in jedem dieser Fälle die adjungierten Funktionen Φ erhalten kann. Es resultieren lin. Differentialgleichungen, die gewisse Variablen nicht enthalten und daher einfacher zu integrieren sind.

E. Schuntner (Wien).

Gunther, N.: Sur le potentiel newtonien. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 446—449 (1932).

This note is a continuation of the preceding work by the author [C. R. **183**, 447 (1926); **189**, 447 (1929) — Atti di Congr. di Bologna **2**, 313 (1928)]. The author states several applications of the notion of a "fonction moyenne additive et à la variation bornée" introduced in the above mentioned papers, to the study of properties of generalized Newtonian potentials and Laplace-Poisson equation. A result of F. Riesz concerning the representation of a superharmonic function as a sum of a Newtonian potential and a harmonic function, is stated to follow from the theory of the author.

J. D. Tamarkin (Providence).

Gunther, N.: Sur le problème du refroidissement. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 538 bis 541 (1932).

The author shows an application of his previous work (cf. the preceding note) to a problem which is a considerable generalization of the classical heat equation, with various boundary conditions. Generalized potentials, Laplacians, and Stieltjes integrals are used throughout the paper.

J. D. Tamarkin (Providence).

Gibrat, R.: Sur un problème de Dirichlet dans un rectangle. J. École polytechn., II. s. **29**, 87—102 (1931).

Le problème particulier dont il s'agit est de trouver une fonction $T(x, y)$ harmonique dans un rectangle, prenant la valeur 1 sur la base et la valeur 0 sur les trois autres côtés; l'aut. étudie numériquement la solution, dont il mentionne des applications électriques et thermiques. On sait que cette sol. peut s'exprimer à l'aide des f. elliptiques; à l'aide de la transformation $t = p(z)$, l'aut. fait correspondre au rectangle des demi-périodes de la fonct. p le demi-plan inférieur de la variable t , et transf. ensuite ce demi-plan en cercle par une homographie; finalement $\text{tg} \frac{\pi T}{2}$ est le produit d'une f. de x par une f. de y , et les deux facteurs sont exprimés par l'aut. dans la notation de Jacobi. Pour les calculs l'aut. utilise le recueil de formules et de tables numériques de Potin, dont il signale plusieurs erreurs. Dès que le rapport de la hauteur à la base est au moins $3/2$, l'aut. trouve qu'avec une erreur maximum de $1/1000$ environ la sol.

T est donnée par une sol. limite correspondant au cas où la haut. est infinie; le cas limite où la haut. devient nulle est utilisable dans des cas plus restreints. Dans le cas particulier où la base vaut 1 et la haut. 1, 5, l'aut. dresse une table de la f , T , étudie les courbes $T = \text{const.}$ et les lignes de courant. *G. Giraud* (Clermont-Ferrand).

Pfeiffer, G.: Généralisation de la méthode de Jacobi de l'intégration des systèmes complets des équations homogènes linéaires. Généralisation de la méthode de Clebsch. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk, VII. s. Nr 8, 1051—1087 (1931) [Russisch].

Es sei ein vollständiges System partieller homogener Differentialgleichungen

$$A_i(f) \equiv \alpha_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, \dots, q) \quad (1)$$

gegeben. Um die gemeinsamen Integrale dieser Gleichungen finden zu können, kann man versuchen, das System (1) nach der Methode von Clebsch zu einem gewissen Involutionssystem zusammenzuführen und dieses letzte mit Hilfe des Jacobischen Verfahrens zu lösen. Auf den Ergebnissen seiner früheren Untersuchungen fußend, gibt der Verf. eine andere einfache Methode, um das System (1) zu integrieren. Zuerst kann man das vollständige System (1) durch ein anderes System

$$X_i(f) \equiv \xi_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, \dots, q) \quad (2)$$

ersetzen, welches dieselben gemeinsamen Integrale wie (1) besitzt. Aber (2) erweist sich als ein „System von aufeinanderfolgenden vollständigen Systemen“, wobei alle Systeme $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ usw. vollständig sind. (Eine solche Zusammenführung ist auf beliebig viele Weisen möglich.) Sind die gemeinsamen Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-l}$ des Systems $X_1 = 0, \dots, X_l = 0$ (γ) bekannt, so wird für jedes beliebige von ihnen der Ausdruck $Z(f) = X_{l+1}(f) : X_{l+1}(\varphi)$ [im Falle $X_{l+1}(\varphi) \neq 0$] ein sog. Operator des Systems (γ) sein. Es werden nämlich $Z(\varphi_k)$ Integrale des Systems (γ) nebst φ_k sein, also $Z(\varphi_k) = \omega_k$ ($\varphi_1, \dots, \varphi_{n-l}$). Jetzt ist es möglich, Funktionen $\theta(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-l})$ so zu bestimmen, daß

$$Z(\theta) \equiv \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{n-l}} \omega_{n-l} = 0$$

ist. Die Auflösung der letzteren Gleichung führt zu den gemeinsamen Integralen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-l-1}$ des Systems $X_1 = 0, \dots, X_{l+1} = 0$. So wird das System (2) durch den Übergang von l zu $l+1$ gelöst. Einige Beispiele. *Janczewski.*

Pfeiffer, G.: Résolution de la relation de S. Lie, définissant les opérateurs d'une équation linéaire, homogène, aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. Sci. math., II. s. 56, 40—45 (1932).

In seinen früheren Abhandlungen (vgl. dies. Zbl. 1, 209; 2, 265) gibt der Verf. verschiedene Methoden für die Konstruktion der sog. Operatoren $Y(f) = \sum \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ der Differentialgleichung $X(f) \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$. Dabei muß Y die Identität von Lie $XY - YX = \lambda X$ befriedigen, wobei λ eine beliebige Funktion von x_1, \dots, x_n ist. Jetzt zeigt der Verf., wie man die Koeffizienten von Y erhalten kann, indem man unmittelbar die Gleichung von Lie und ein gewisses daraus entstehendes Jacobisches System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit mehreren unbekannten Funktionen löst. *Janczewski* (Leningrad).

● **Engel, Friedrich: Die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.** Bearb. v. Karl Faber. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. XI, 367 S. geb. RM. 28.—.

Die Liesche Theorie der part. Diff.Gl. 1. Ordng. und die damit verknüpften Theorien werden hier neu verarbeitet. Der Stoff ist auf 10 Kapitel verteilt. Kap. I. Infinitesimale Trsf. und lineare part. Diff.Gl. 1. Ordng.: Der (ohne Beweis übernommene) Existenzsatz über die Lösungen eines simult. Systems gewöhn. Diff.Gl.; die Begriffe der infin. Trsf. und der eingl. kontin. Gruppe, die wichtigsten Eigenschaften derselben; insbes. werden die invarianten

Mannigfaltigkeiten der infin. Trsf. betrachtet. Integration und Besprechung der Lösungen einer linearen homog. part. Diff.Gl. Begriff des vollständigen und Jacobischen Systems, Existenzsatz über die Lösungen vollst. Systeme und der Zusammenhang zwischen solchen und den zugehörigen unbeschränkt integrablen lin. totalen Systemen. Definition und Eigenschaften der bilinearen Kovariante einer Pfaffschen Form. Reduktion eines vollst. Systems und des zugehörigen tot. Systems auf eine lin. homog. part. Diff.Gl. bzw. auf ein simult. System gew. Diff.Gl. Beweis des Mayerschen Theorems. Kap. II. Vollständige Systeme mit bekannten infin. Trsf. und Multiplikatoren: Einige Sätze betreffend infin. Trsf. vollst. Systeme in sich, insbes. ein Satz über Verwertung bekannter infin. Trsf. eines vollst. Systems in sich bei der Integration des Systems. Definition, Besprechung der Eigenschaften und Ableitung der Diff.Gl. des Multiplikators eines vollst. Systems. Theorie des letzten Multiplikators und die verschiedenen Beziehungen zwischen den Lösungen, Multiplikatoren und infin. Trsf. eines vollst. Systems. Kap. III. Die Integration der part. Diff. Gl. 1. Ordng. $F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$: Formulierung des Integrationsproblems, Besprechung und Bestimmung der Elementvereine in x, p . Begriff und Eigenschaften charakteristischer Elemente, Scharen von Vereinen, charakteristische Streifen, Begriff und Darstellung infin. Berührungstrsf. in x, p . Die Cauchysche Integrationsmethode und die Theorie der vollst. Lösungen der Gl. $F = 0$. Kap. IV. Involutionsysteme in x, p : Definition und Eigenschaften der Involutionsysteme (I.S.), charakteristische Vereine der I.S., die erweiterte Cauchysche Integrationsmethode, die Jacobi-Mayersche Methode, die Reduktion eines I.S. auf eine part. Diff.Gl. und die Liesche Integrationsmethode. Kap. V. Homogene Involutionsysteme und Involutionsysteme in x, x, p : Definition der homog. I.S. Kanonische Form der größten Vereine, Scharen von Vereinen. Begriff der singulären und nichtsingulären Integralvereine einer homog. part. Diff. Gl. 1. Ordng. und eines homog. I.S. Konstruktion nichtsingulärer Integralvereine. Theorie der vollst. Lösungen eines homog. I.S. Die Jacobi-Mayersche und die Liesche Integrationsmethode für homog. I.S. Theorie der I.S. in z, x, p . Kap. VI. Die Berührungstrsf. in x, p und ihre Invariantentheorie: Definition der Berührungstrsf. (B.T.). Bestimmung aller B.T. ohne Integration. Eigenschaften insbes. charakteristische der B.T. Theorie der Funktionengruppen (F.G.): Begriff der F.G., reziproke Gruppen, ausgezeichnete Funktionen und ihre Diff. Gl., kanonische Form einer F.G., invariante Eigenschaften der F.G., Bestimmung der in einer F.G. enthaltenen Systeme von involutorischen Funktionen. Kap. VII. Homogene B.T. und ihre Invariantentheorie: Definition der homog. B.T. Eigenschaften und Bestimmung aller homog. B.T. ohne Integration. Begriff allgemeinsten B.T. des R_n und ihre Eigenschaften insbes. ihre Äquivalenz mit den homog. B.T. des R_n . Homog. infin. B.T. und ihre Eigenschaften. Theorie der homog. F.G.: Übertragung der entsprechenden Theorie des vorhergehenden Kapitels auf homog. F.G. Kap. VIII. Anwendungen der Theorie der B.T. auf I.S.: Zusammenhang zwischen den charakteristischen Streifen einer part. Diff. Gl. 1. Ordng. und den infin. B.T. Transformationen der I.S. durch B.T. und die Jacobi-Mayersche Methode im Lichte solcher Trsf. Ermittlung niedrigster Ordnungen der unter einem Forderungssatz auszuführenden Operationen bei der Integration eines I.S. und eines homog. I.S. Kap. IX. Integrationsvereinfachungen beim Eintreten besonderer Umstände: Ein Satz über den Zusammenhang der Lösungen des vollst. Systems $(F_i, f) = 0$ und gewisser F.G., einige Sätze über spezielle Integrationsfälle, wo nur Quadraturen und ausführbare Operationen notwendig sind; Sätze über allgemeine Verwertung bekannter Lösungen bei der Integration der I.S. insbes. betreffend die höchsten Ordnungen der auszuführenden Operationen. Theorie der Integrationsvereinfachungen durch bekannte infin. Trsf. Kap. X. Anwendungen der Lieschen Theorie auf die klassische Mechanik: Galileische Gruppe, Hamiltonsche Gleichung und ihre infin. Trsf.; Besprechung der Bewegungsgleichungen. O. Borůvka (Brno).

Integralgleichungen:

Badesen, Radu: Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 13—17 (1932).

The object of this note is to extend the domain of existence of the solution of the integral equation in the complex field, considered in a preceding note (see this Zbl. 3, 58). The author finds that the solution $\varphi(z)$ will be holomorphic interior to the domain common to the interior of the curves C_j^{-1} , the transforms of the curve of integration C , via the inverse branch of $\theta_j(z)$ for which $\theta_j(\zeta) = \zeta$, ζ being the attractive point. Further

extensions are illustrated for the case in which $K(z, s) = \sum_{i=1}^p \frac{K_i(z, s)}{(z - \theta(z))^i}$. It is found that

if the curve C is any curve interior to the attractive region of $\theta(z)$, then the solution can be defined interior to the curves which are the transformations of C via the n branches of the inverse of $\theta(z)$, the analytic representations in the different regions being in general distinct. Hildebrandt (Ann Arbor).

Sanielevici, S.: Sur les équations intégrales singulières. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 683—685 (1932).

Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\alpha s|} \varphi(s) ds = 0. \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

Jede Lösung von (1) genügt der Differentialgleichung

$$\varphi''(x) - \varphi(x) + \lambda \varphi(x/\alpha) = 0, \quad (2)$$

und jede Lösung von (2), für welche das obige Integral einen Sinn hat, befriedigt auch (1). Ist speziell $\lambda = \alpha^n$, so wird (2) durch ein Polynom n -ten Grades gelöst, so daß die α^n Eigenwerte von (1) sind. — Die inhomogene Gleichung

$$\varphi''(x) - \varphi(x) + \lambda \varphi(x/\alpha) = f(x) \quad (3)$$

ist, ebenso wie (2) zu (1), äquivalent zu

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\alpha s|} \varphi(s) ds = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-s|} f(s) ds. \quad (4)$$

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, die höchstens wie ein Polynom unendlich wird, so kann man (4), ausgehend von $\lambda = 0$, durch sukzessive Approximation lösen. Obwohl in jeder Nähe von $\lambda = 0$ Eigenwerte liegen, hat die Reihe einen von Null verschiedenen Konvergenzradius; er ist z. B. 1, wenn $f(x)$ beschränkt ist. Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grade n , so konvergiert die Neumannsche Reihe für $|\lambda| < \alpha^n$. Sie kann auch für alle λ konvergieren, z. B. bei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin x/\alpha^n$, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. *G. Wiarda.*

Sanielevici, S.: Sur les équations intégrales singulières. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 829—830 (1932).

Die in der vorangehenden Arbeit (C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 683—685) ausgesprochene Behauptung, daß für ein beliebiges λ die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\alpha s|} \varphi(s) ds = 0 \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

kein analytisches Integral besitzt, beweist sich daraus, daß jede Lösung von (1) der Differentialgleichung

$$\varphi''(x) - \varphi(x) + \lambda \varphi(x/\alpha) = 0 \quad (2)$$

genügt. Geht man nämlich in diese mit dem Ansatz $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hinein, so ergibt sich die Rekursionsgleichung $(n+1)(n+2)c_{n+2} = c_n(1 - \lambda/\alpha^n)$, also $|c_{n+2}/c_n| \rightarrow \infty$. —

Dagegen führt der Versuch, (2) durch eine Funktion der Form $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n \varphi_n(x)$ zu lösen, zum Ziele; denn für die $\varphi_n(x)$ erhält man die Rekursionsgleichung

$$\varphi_n''(x) - \varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x/\alpha) = 0, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

die durch $\varphi_{n-1}(x) = A \sin rx/\alpha^{n-1}$ und $\varphi_n(x) = \frac{A}{1 + r^2/\alpha^{2n}} \sin rx/\alpha^n$ gelöst wird. So ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) = & A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \sin rx/\alpha^n}{(1 + r^2/\alpha^2)(1 + r^2/\alpha^4) \dots (1 + r^2/\alpha^{2n})} \\ & + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + r^2)(1 + r^2\alpha^2) \dots (1 + r^2\alpha^{2n-2})}{\lambda^n} \sin r\alpha^n x. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hierin ist die erste Reihe für jedes λ , die zweite nur für $|\lambda| > 1$ konvergent. Es gibt also außer den Eigenwerten $\lambda = \alpha^n$ noch das kontinuierliche Spektrum $|\lambda| > 1$.

G. Wiarda (Dresden).

Hille, Einar, and J. D. Tamarkin: On the characteristic values of linear integral equations. *Acta math.* 57, 1–76 (1931).

“What can be said about the distribution of the characteristic values of the Fredholm integral equation $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi$ on the basis of the general

analytic properties of the kernel $K(x, \xi)$ such as integrability, continuity, differentiability, analyticity and the like?” — Diese Fragen werden für eine große Anzahl verschiedener Voraussetzungen für den Kern der Integralgleichung beantwortet, die sich alle in dem genannten Rahmen bewegen. Zur Gewinnung der nötigen Abschätzungen wird konsequent die Methode der unendlich vielen Veränderlichen und der unendlichen Determinanten sowie die Theorie der Approximation im Mittel herangezogen. Die betreffenden Sätze aus dieser Theorie, insbesondere gewisse Abschätzungen unendlicher Determinanten werden in einem eigenen Kapitel ausführlich behandelt. Mit Hilfe dieser Sätze ergeben sich die Wachstumsverhältnisse der Eigenwerte bei quadratisch integrierbaren Kernen mit den verschiedensten Eigenschaften. Es sei hervorgehoben: Kerne vom Faltungstypus; Kerne, deren Ableitungen geeignete Stetigkeitsvoraussetzungen genügen; Kerne, die analytische, speziell ganze Funktionen von x sind usw. Die einzelnen Resultate lassen sich ihrer großen Fülle wegen im Referat nicht wiedergeben; eine am Schluß gegebene Zusammenfassung der Resultate weist 15 verschiedene Fälle auf, in denen das Größenwachstum der Eigenwerte angegeben werden kann. Die ausgedehnte Literatur über diesen Gegenstand ist auf das sorgfältigste zusammengestellt und berücksichtigt. Rellich (Göttingen).

Variationsrechnung:

● Contributions to the calculus of variations 1930. — Boyce, Moffatt Grier: An envelope theorem and necessary conditions for a problem of Mayer with variable end-points. — Huke, Aline: An historical and critical study of the fundamental lemma of the calculus of variations. — Wren, Frank Lynwood: A new theory of parametric problems in the calculus of variations. — McShane, Edward James: Semi-continuity in the calculus of variations and absolute minima for isoperimetric problems. — Duren jr., William Larkin: The development of sufficient conditions in the calculus of variations. Chicago: Univ. of Chicago press. 1931 349 S. geb. \$3.—.

This volume is a collection of five doctoral dissertations submitted to the University of Chicago during 1930.

The paper by Boyce derives an analogue of the Jacobi condition for the problem of Mayer with one end-point variable on a manifold of arbitrary type, while the other end-point is fixed. The proof is of a geometric nature, based on an extension of the envelope theorem of Kneser. The normality hypothesis used in the proof is weaker than that usually made in the discussion of the Jacobi condition for the Lagrange problem.

The paper by Miss Huke is a valuable historical contribution, and includes an exhaustive critical survey of the literature connected with the fundamental lemma of the calculus of variations in its various forms. The chapter headings are as follows. I. Intuitive deductions of the conclusions of the fundamental lemma. II. The period of early proofs and attempted proofs (1823–1870). III. Modern proofs (1870 ssq.). IV. Modifications of the fundamental lemma. V. Analogues of the fundamental lemma, and du Bois-Reymond's lemma for multiple integrals. Chapter VI discusses the methods of Hilbert, Mason, Fubini, Kurosu, Kubota, Haar, Lichtenstein, Szucs, and Schauder, and includes also a number of extensions of theorems and improvements in the proofs due to the author. The classified bibliography includes 131 references.

The paper by Wren deals with the problem of the calculus of variations in parametric form in n -space, with the integrand expressed as the square root of a function $2f(x, x')$ positively homogeneous of degree 2 in the variables x'_i . The new form for the parametric problem is a generalization of the forms which occur in Riemannian geometry and the theory of relativity, and avoids some of the difficulties of the classical parametric theory due to the homogeneity of the integrand function. The usual formulas of the parametric theory take new forms which make their tensor character more obvious, and which in particular enable the author to avoid the difficulties which have hampered the development of a symmetrical Hamilton-Jacobi theory for parametric problems.

The paper by McShane is concerned primarily with the existence of the absolute minimum for isoperimetric problems in the calculus of variations. The class of isoperimetric problems included in the principal theorem is more inclusive than that previously treated by Tonelli in the various theorems of his „Calcolo delle Variazioni“. The proofs, which are carried through for integrals in a space of n dimensions, are comparatively simple. The simplification is due largely to a systematic use of the following noteworthy lemma: Suppose that for the curves C_m : $x^i = x_m^i(t)$, C_0 : $x^i = x_0^i(t)$, ($a \leq t \leq b$; $i = 1, \dots, n$; $m = 1, 2, 3, \dots$), the parameter t is so chosen that $\lim x_m^i(t) = x_0^i(t)$ uniformly on (a, b) , while the derivatives

$x_m^{i'}(t)$ are uniformly bounded. Then $\limsup J(C_m) - J(C_0) = \limsup \int_a^b E(x_0, x_0', x_m') dt$, $\liminf J(C_m) - J(C_0) = \liminf \int_a^b E(x_0, x_0', x_m') dt$, where E is the Weierstrassian function

calculated for the integral $J(C) = \int F(x, x') dt$. The last part of the paper uses this lemma to derive also certain generalizations of the theorems of Osgood and Lindeberg.

The paper by Duren is a historical and critical survey of the literature relating to the development of sufficient conditions for an extremum in the calculus of variations. After a brief survey of the pre-Weierstrassian memoirs, the author discusses the derivation of sufficient conditions by expansion methods, the field method of Weierstrass, and related methods of Darboux-Kneser, Carathéodory, and Tonelli. The author then reviews the results for the more general problems of Lagrange and Mayer, and for isoperimetric problems, problems with variable end-points, minimizing arcs with corners, minimizing arcs lying partly on the boundary of the region, and closed extremals. A final brief chapter relates to multiple integrals. The classified bibliography contains 121 references. *Graves (Chicago).*

Quade, Wilhelm: Über einige Variationsansätze der Elektrodynamik ruhender Körper. Karlsruhe: Diss. 1931 u. Leipzig: Robert Noske 1932. 65 S.

In Analogie zu den bekannten Variationsansätzen der Mechanik, aus denen sich die Bewegungsgleichungen ergeben, lassen sich auch in der Elektrodynamik Variationsansätze aufstellen, aus denen die Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet werden können. Sie bestehen darin, daß die Forderung nach der Stationarität eines vierfachen raumzeitlichen Integrales über eine gewisse, aus den Feldvektoren gebildete Funktion aufgestellt wird, mit bestimmten Randbedingungen an seinen Grenzen. In der vorliegenden Arbeit wird ein ruhendes, homogenes und isotropes Medium zugrunde gelegt. Es werden zunächst für umkehrbare elektrodynamische Vorgänge systematisch die bekannten Variationsansätze von Helmholtz und Larmor hergeleitet, die sich auf eine, dem Hamiltonschen Prinzip der Mechanik analoge Form, nämlich

$$V = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = \text{stationär}$$

bringen lassen, worin T die gesamte magnetische und U die gesamte elektrische Energie in einem abgeschlossenen Volumen bedeuten. Darüber hinaus kann man nun auch zu entsprechenden Ansätzen für nicht-umkehrbare Vorgänge in leitenden Medien gelangen. Solche Ansätze lassen sich auch in Anlehnung an Maxwell aus der Forderung gewinnen, daß die im Leiter entwickelte Wärmemenge ein Minimum werden soll. Endlich wird gezeigt, wie man durch Fortbildung eines von L. Königsberger gegebenen Ansatzes zu einem Variationsprinzip für nicht-umkehrbare elektrodynamische Vorgänge kommen kann, das aber, im Gegensatz zu dem früheren, nur eine mathematische und keine physikalische Bedeutung hat. *Fürth (Prag).*

Kerner, Michael: Minimaxeigenschaft der offenen und geschlossenen Extremalen. *Math. Z.* 34, 645—667 (1932).

Die Resultate der Arbeit stehen in engem Zusammenhang mit den allgemeinen Untersuchungen von M. Morse. Der Verf. gibt eine modifizierte Definition des Birkhoff'schen Minimaxes. Mit dieser neuen Definition beweist der Verf. folgende Sätze: Enthält die Extremale C , die die Punkte A und B verbindet, den zweiten konjugierten Punkt von A nicht, so besitzt sie die Minimaxeigenschaft. Es gilt auch: Wenn C die Minimaxeigenschaft besitzt, so geht der zweite konjugierte Punkt von A dem Punkte B nicht voran. Analoge Sätze gelten auch für geschlossene Extremale. *L. Schnirelmann.*

Hedlund, Gustav A.: Poincaré's rotation number and Morse's type number. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 75—97 (1932).

Einem Gedanken von Poincaré folgend, definiert der Verf. den folgenden Begriff der Rotationszahl einer geschlossenen Extremale. Es sei v die Zahl derjenigen konjugierten Punkte zu irgendeinem Punkte P der Extremale, die auf einem Extremalenbogen der Länge nw liegen (wobei w die Länge der ganzen geschlossenen Extremale bedeutet). Diese Zahl ist bis auf eine Einheit vom Punkte P unabhängig. Der notwendigerweise existierende Grenzwert $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v}{n}$ wird die Rotationszahl der Extremale genannt. — Der Zweck der Arbeit ist, die Zusammenhänge zu finden zwischen der Rotationszahl einer auf einer zweidimensionalen Fläche liegenden Extremale und der Morseschen charakteristischen Zahl der geschlossenen Extremale. Diese Zusammenhänge hängen von der Orientierbarkeit der Umgebung der Extremale ab. Es gelten eine Reihe von interessanten Sätzen, z. B. der folgende: Wenn die Rotationszahl einer Extremale, die eine orientierbare Umgebung besitzt, irrational ist, so ist die Morsesche charakteristische Zahl dieser Extremale eine ungerade Zahl.

L. Schnirelmann (Moskau).

Kerner, Michel: Sur les variations faibles et fortes d'une fonctionnelle. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10**, 145—164 (1932).

Verf. betrachtet Funktionale $f(P)$, welche in einem abstrakten Vektorraume definiert sind, und ihre schwachen und starken Variationen $\delta^n f(P; X_1; X_2; \dots; X_n)$ und $\bar{\delta}^n f(P; X_1; X_2; \dots; X_n)$ von beliebigen Ordnungen n . Es wird bewiesen, daß unter gewissen Bedingungen diese Variationen in bezug auf X_i symmetrisch sind. Für die starken Variationen werden die Formeln

$$\frac{df[P(u)]}{du} = \delta f[P(u); P_u(u)],$$

$$\frac{d^2 f[P(u)]}{du^2} = \bar{\delta}^2 f[P(u); P_u(u); P_u(u)] + \bar{\delta} f[P(u); P_{uu}(u)]$$

abgeleitet. Die Abhandlung enthält auch mehrere andere Resultate (darunter auch neue Beweise schon früher bekannter Sätze von Banach, Fréchet und Lévy).

A. Kolmogoroff (Moskau).

Funktionentheorie:

Cisotti, Umberto: Sulle funzioni analitiche di ordine n regolari in un cerchio. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **64**, 1137—1143 (1931).

L'aut. rappelle la définition, due à Burgatti, des fonctions analytiques d'ordre n , et leur expression

$$f = \sum_{h=0}^{n-1} \varrho^{2h} \chi_h(z), \quad (z = x + iy, \varrho = |z|)$$

où les χ_h sont des fonct. analytiques arbitraires. Etant donné n cercles ayant pour centre O , et dont les rayons ϱ_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) sont distincts, l'aut. cherche une telle fonct. f dont la partie réelle prenne sur les n circonférences des valeurs données. Soit f_j la fonction, définie à une constante purement imaginaire près, holomorphe dans le cercle de rayon ϱ_j , et dont la partie réelle prend sur le contour les val. données; l'aut. trouve comme expression de f la somme des produits des f_j par certains polynomes en ϱ^2 . L'aut. remarque que cette fonct. est régulière dans le plus petit des cercles; pour être vraiment une solution du prob., elle devrait évidemment être régulière dans le plus grand des cercles.

Georges Giraud (Clermont-Ferrand).

Visser, C.: Sur les limites des fonctions bornées à la frontière de leur domaine d'existence. Nieuw Arch. Wiskde **17**, 147—150 (1932).

Für jede Funktion $f(z) = f(x + iy)$, die in der rechten Halbebene regulär ist und dort einen positiven Realteil hat, ist bekanntlich $\lim_{x \rightarrow \infty} f(z)/z = \lambda$ ($0 \leq \lambda < \infty$) gleichmäßig für $|y/x| \leq K$. — Es wird gezeigt, daß die Beschränktheitsvoraussetzung

für $|y/x|$ wesentlich ist, indem zu einer beliebig gegebenen Folge von Punkten $a_n + b_n i$ der rechten Halbebene mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = +\infty$ eine Funktion $f(z)$ der betrachteten Klasse konstruiert wird, für die der obige Grenzwert nicht vorhanden ist. *R. Schmidt* (Kiel).

Tannaka, Tadao: Eine Bemerkung zu einem Satz von Herrn Takahashi. Tôhoku Math. J. **35**, 43—46 (1932).

In einem Satze von Takahashi [Tôhoku Math. J. **33**, 55—60 (1930)] über sternförmige Abbildung des Einheitskreises wird die Voraussetzung der Schlichtheit der abbildenden Funktion als überflüssig erkannt. — Ferner behandelt Verf. einen Spezialfall eines Satzes von Dieudonné [Ann. of Math. **31** (1930)]. *R. Schmidt* (Kiel).

Julia, Gaston: Prolongement d'une surface de Riemann σ correspondant à une aire multiplement connexe. A. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 580—583 (1932).

Der Verf. gibt als Fortsetzung seiner früheren Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. **3**, 260, 261) eine einfache Methode an, um die durch konforme Abbildung eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes entstandene Riemannsche Fläche σ über ihre inneren Randkurven hinaus fortzusetzen. Die fortgesetzte Fläche σ_1 kann durch die inverse Funktion eines Polynomes oder durch die Umkehrfunktion einer rationalen Funktion mit dem Einheitskreis als Fundamentalkreis auf ein schlichtes Gebiet abgebildet werden. *Ahlfors* (Paris).

Possel, René de: Sur les ensembles du type maximum, et le prolongement des surfaces de Riemann. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 585—587 (1932).

Im Anschluß an frühere Mitteilungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. **3**, 313, 314) werden neue Kriterien dafür angegeben, wann ein System Δ von offenen, sich gegenseitig nicht überdeckenden Intervallen auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ vom Maximumtypus ist. Ferner werden hinreichende Kriterien dafür mitgeteilt, daß die zu Δ gehörige Extremalfunktion zur Klasse F_Δ gehört. Eine Funktion $f(z)$ gehört zur Klasse F_Δ , wenn sie $|z| < 1$ auf einen Sternbereich abbildet und der Arcus von $f(e^{it})$ bereits auf Δ seinen Gesamtzuwachs erfährt. Endlich wird die Frage, ob eine abstrakt gegebene Riemannsche Fläche fortsetzbar ist oder nicht, mit den vorliegenden Untersuchungen in Zusammenhang gebracht. *K. Löwner* (Prag).

Seidel, Wladimir: On the cluster values of analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 1—21 (1932).

A heißt ein Häufungswert (cluster value) einer in $|z| < 1$ regulären Funktion $w = f(z)$ in einem Randpunkt ζ ($|\zeta| = 1$), wenn für passende $z_\nu \rightarrow 1$ ($|z_\nu| < 1$) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z_\nu) = A$

gilt. Die Verteilung dieser Häufungswerte (der „Unbestimmtheitsbereich“ — cluster set) eines in $|z| < 1$ (beschränkten) analytischen $f(z)$ in einem Randpunkt ζ wird untersucht, und dabei werden zum Teil Verallgemeinerungen von Sätzen von Lindelöf, Gross und Iversen hergeleitet: 1. C bezeichne eine geschlossene Jordan-Kurve in $|z| \leq 1$, die mit $|z| = 1$ nur $z = 1$ gemeinsam hat, G sei ihr Inneres. Dann gilt für in $|z| < 1$ beschränktes $f(z)$: $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \text{ aus } G}} |f(z)| \leq \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \text{ auf } C}} |f(z)|$. Die „entsprechende“

Relation $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \text{ aus } G}} |f(z)| \geq \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \text{ auf } C}} |f(z)|$ ist i. a. für nur beschränktes $f(z)$ falsch (Gegenbeispiel:

Blaschkesches Produkt). Dagegen gilt für schlichtes (nicht notwendig beschränktes) $f(z)$ über diese Relationen hinaus genauer, daß jeder Häufungswert von $f(z)$ für $z \rightarrow 1$, z aus G , in der Menge der Häufungswerte von $f(z)$ für $z \rightarrow 1$, z auf C , enthalten ist. 2. Es sei $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$, $f(z) \neq \alpha$, $|\alpha| \leq 1$. Sind dann z_ν, z'_ν zwei gegen $z = 1$ konvergierende Punktfolgen aus $|z| < 1$, deren nichteuklidischer

Abstand $D(z_\nu, z'_\nu) = \lg \frac{1 + \left| \frac{z_\nu - z'_\nu}{1 - \overline{z_\nu} z'_\nu} \right|}{1 - \left| \frac{z_\nu - z'_\nu}{1 - \overline{z_\nu} z'_\nu} \right|} \leq M$ ($M > 0$, von ν frei) ist, so folgt aus

$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z_\nu) = \alpha$ auch $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z'_\nu) = \alpha$. (Hieraus ergibt sich z. B. für schlichtes $f(z)$, daß die Mengen der Häufungswerte von $f(z)$ für $z \rightarrow 1$ längs zweier in $z = 1$ mündender Sehnen von $|z| = 1$ oder sogar längs zweier $|z| = 1$ in $z = 1$ von der gleichen Ordnung berührender Kurvenbögen übereinstimmen.) Der Satz bleibt noch richtig, wenn nur endlich oft in $|z| < 1$ $f(z) = \alpha$ wird, wird aber falsch (Gegenbeispiel: wieder Blaschkesches Produkt), wenn in jeder Umgebung von $z = 1$ α angenommen wird. 3. Es sei $|f(z)| \leq 1$ in $|z| < 1$ und für $z = u_k \rightarrow 1$ aus $|z| < 1$ $f(u_k) = 0$. Ferner habe $f(z)$ auf einem Bogen von $|z| = 1$ mit $z = 1$ als Mittelpunkt stetige Randwerte vom Betrage 1, bis auf $z = 1$. Dann nimmt $w = f(z)$ jeden Wert w aus $|w| < 1$ mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an, und keinen Wert w mit $|w| = 1$ in $|z| < 1$. Die Menge der Häufungsstellen von $f(z)$ in $z = 1$ ist der abgeschlossene Kreis $|w| \leq 1$. 4. Es sei $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$, $z_\nu \rightarrow 1$, $z'_\nu \rightarrow 1$ mit der nichteuklidischen Distanz $D(z_\nu, z'_\nu) \leq M$ ($M > 0$, von ν frei). Dann sind entweder die Häufungswerte von $f(z)$ in $z = 1$ für beide Folgen identisch, oder die Menge der Häufungswerte von $f(z)$ enthält eine volle Kreisscheibe der w -Ebene, aus deren Inneren jeder Wert unendlich oft angenommen wird. S. Warschawski (Göttingen).

Doob, Joseph L.: The boundary values of analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 153–170 (1932).

Eine in $|z| = |re^{i\vartheta}| < 1$ beschränkte analytische Funktion $f(z)$ hat nach Fatou bekanntlich für $r \uparrow 1$ bis auf eine ϑ -Menge vom Maße 0 eine radiale Randfunktion $F(e^{i\vartheta})$. Es werden einige Sätze über den Zusammenhang zwischen $F(e^{i\vartheta})$ und den Häufungswerten von $f(z)$ bei verschiedenen (auch „tangentiellen“) Annäherungen von z an einem beliebigen Punkt von $|z| = 1$ hergeleitet. Diesen wird ein verallgemeinerter Grenzwertbegriff, der „metrische Häufungswert“ (metric cluster value) zugrunde gelegt, der eine Verallgemeinerung der Denjoyschen Begriffsbildung der Fast-Stetigkeit darstellt. Ist E eine meßbare Punktmenge in einem (eindimensionalen) Intervall I , P ein Punkt (evtl. auch Endpunkt) von I , so heißt der für alle möglichen P enthaltenden Intervalle A von I gebildete $\lim_{mA \rightarrow 0} \frac{m(A \cdot E)}{mA} = \bar{D}$ (wie bekannt) die obere (\bar{D}) bzw. untere (\underline{D}) Maßdichte von E in P . Werden hierbei nur Intervalle A mit P als Mittelpunkt gewählt, so heißt \bar{D} bzw. \underline{D} die mittlere obere bzw. untere Maßdichte von E in P . Es sei L eine in einem Punkt P von $z = 1$ mündende Sehne des Einheitskreises, α ein Häufungswert von $f(z)$ für $z \rightarrow P$, z auf L . Dann nennt Verf. α einen metrischen Häufungswert (m. H.) von $f(z)$ in P längs L erster (bzw. zweiter) Art, wenn die Menge E_ε der z -Punkte auf L , für die $|f(z) - \alpha| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) ist, die untere (bzw. obere) — einseitig gebildete — Maßdichte $\underline{D}_\varepsilon$ (bzw. \bar{D}_ε) in P hat, derart, daß

$$(*) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \underline{D}_\varepsilon = 0 \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \bar{D}_\varepsilon = 0), \quad d > 0,$$

gilt. Die obere Grenze der Zahlen d , für die (*) gilt, heißt die Ordnung des m. H. In analoger Weise werden die m. H. von $F(e^{i\vartheta})$ längs eines Bogens l von $|z| = 1$ mit dem einen Endpunkt P in P definiert. Dann gelten folgende Sätze, denen die Voraussetzung $|f(z)| \leq 1$ in $|z| < 1$ gemeinsam ist: 1. Auf einer meßbaren Menge E von $|z| = 1$, die in $z = e^{i\vartheta_0}$ die obere bzw. untere mittlere Maßdichte \bar{D} bzw. \underline{D} hat, gelte für die Randfunktion $|F(e^{i\vartheta})| \leq \eta < 1$. Dann ist

$$\lim_{r \uparrow 1} |f(re^{i\vartheta_0})| \leq \eta^{\sigma(\underline{D})}, \quad \lim_{r \uparrow 1} |f(re^{i\vartheta_0})| \leq \eta^{\sigma(\bar{D})},$$

wobei

$$\sigma(\delta) = \frac{2}{\pi} \arctg \left[\frac{\delta}{2} (1 - \delta)^{-\frac{1}{2}} \right], \quad \delta < 1, \quad \sigma(1) = 1$$

ist. 2. a) Die m. H. 1. und 2. Art von $F(e^{i\vartheta})$ in einem Punkt P von $|z| = 1$ der Ordnung > 1 sind in der Menge der Häufungsstellen von $f(z)$ für $z \rightarrow P$ längs einer Kreissehne in P enthalten. b) Kommt in der Menge der m. H. 1. und 2. Art von $F(e^{i\vartheta})$ in P der

Ordnung > 1 ein solcher α 1. Art wirklich vor, so hat $f(z)$ für $z \rightarrow P$ bei beliebiger nichttangentieller Annäherung den einzigen Grenzwert α , und sämtliche m. H. beider Arten von $F(e^{i\vartheta})$ der Ordnung > 1 sind gleich α . 3. Hat $f(z)$ längs einer Kreissehne in P einen m. H. α 1. Art der Ordnung > 2 , so gilt $f(z) \rightarrow \alpha$ bei nichttangentieller Annäherung von z an P (Verallgemeinerung eines Lindelöf'schen Satzes). — Ferner werden zwei weitere Sätze über $F(e^{i\vartheta})$ und $f(z)$ bei gewissen tangentiellen Annäherungen von z an einen Randpunkt bewiesen. — Ein Hilfsmittel bei den Beweisen sind einige auch an sich interessante Anwendungen des bekannten Ostrowskischen Satzes, daß eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, für die

$$\int_0^{2\pi} \lg |f(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq k$$

(k von r frei) gilt, für fast alle ϑ Randwerte $F(e^{i\vartheta})$ besitzt, für die $\int_0^{2\pi} |\lg |F(e^{i\vartheta})|| d\vartheta$ existiert.

S. Warschawski (Göttingen).

Seidel, W., and S. B. Littauer: Lines of Julia of integral functions. (*Dep. of Math., Harvard Univ., Cambridge [U.S.A.]*.) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 90–93 (1932).

Unter einem Juliastrahl (J-Strahl) verstehen die Verff. einen Halbstrahl vom Ursprung aus, in dessen beliebig schmalen Winkelumgebungen jeder endliche Wert bis auf einen unendlich oft angenommen wird. (Es sei bemerkt, daß Valiron da von einem Picardstrahl spricht.) Mit Hilfe von Normalfamilien werden Aussagen über Auftreten und Lage von J-Strahlen gemacht. Eine erste Gruppe zielt auf Verschärfung klassischer Sätze von Lindelöf, etwa: Zwei Konvergenzwege (Strahlen), welche verschiedenen transzendenten Singularitäten der Riemannschen Fläche entsprechen, werden durch J-Strahlen getrennt, und ähnliches mehr. Eine zweite Gruppe von Aussagen zeigt: Wächst die ganze Funktion auf zwei Strahlen verschieden rasch, so schließen diese einen J-Strahl ein. Hierüber hat kürzlich Valiron schärfere und etwas allgemeinere Aussagen gemacht, sofern es sich um Wachstumsordnung handelt: er konnte nämlich auf den Grenzexponenten, also auf die Häufigkeit schließen, mit der alle Werte bis auf einen angenommen werden (Ann. di mat. IV s. 9, bes. S. 282f; dies. Zbl. 2, 402). Die Verff. betrachten aber auch den Wachstumstypus. Drittens kann im Zusammenhang mit Ergebnissen von Gontscharoff aus geeigneten Annahmen über Verteilung einer Stellensorte (etwa 0) in einem Winkelraum beliebiger Breite darauf geschlossen werden, daß dieser entweder einen J-Strahl enthält oder daß die Funktion gleichmäßig gegen 0 strebt.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Valiron, Georges: Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle. Bull. Sci. math., II. s. 56, 10–32 (1932).

Die Arbeit unternimmt eine Einteilung der wesentlichen Randsingularitäten von Funktionen, die im Einheitskreis regulär oder meromorph sind, und stützt diese Einteilung auf die Wertverteilung in der Teilumgebung im Kreisinneren eines Randpunkts. Die Ergebnisse liegen alle in folgender Richtung: Wenn eine Funktion im Einheitskreis ein gewisses Wertverteilungsverhalten zeigt, so gibt es wenigstens einen Randpunkt, in dessen Teilumgebung dasselbe Verhalten besteht; oder m. a. W.: Das Verhalten im Großen muß an wenigstens einer Randstelle auch im Kleinen gelten; es kann nicht durch eine Art von Durchschnittsbildung zustande kommen; läßt z. B. eine Funktion im Einheitskreis höchstens zwei Werte aus, so kann sie nicht in der Umgebung jedes Randpunkts drei Werte auslassen, von denen etwa nur zwei allen Randpunkten gemein sind. — Zur Besprechung im einzelnen schicken wir voraus, daß die Theorie der Wertverteilung von Nevanlinna auch auf den Fall des Einheitskreises angewendet werden konnte. Auch hier ist das Wachstum der Charakteristik $T(r, f)$ für $r \rightarrow 1$ maßgebend für die Wertverteilung im großen.

Vier Fälle: 1. Wächst $T(r, f)$ rascher als $\log \frac{1}{1-r}$, so gilt der Picardsche Satz mit seinen Verallgemeinerungen, es gibt höchstens zwei Werte, die gar nicht angenommen werden. 2. Für $T(r, f) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$ kann sich die Zahl der Ausnahmewerte auf endlich viele (> 2) erhöhen. 3. Für $T(r, f) = o\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$ können sogar abzählbar viele Werte ausgelassen werden. 4. Für

$T(r, f) = O(1)$ eine Wertmenge vom Maße Null. Dadurch wird z. B. auch die Wertverteilung automorpher Funktionen erfaßt. — Im Anschluß an diese Fälle heiße ein Randpunkt Picard-Punkt 1. bis 4. Art, je nachdem in seiner Teilumgebung höchstens Wertverteilungsverhalten einer dieser Arten eintritt. Funktionen jeder Art haben mindestens einen Picard-Punkt ihrer Art auf dem Rande des Einheitskreises. Für Funktionen der ersten Art werden weiterhin Borel-Punkte (BP) betrachtet; ihre Definition schließt an die Übertragung des Picard-Borelschen Satzes auf den Einheitskreis an: Sei z eine endliche oder unendliche komplexe Zahl, z_1, z_2, \dots die z -Stellen von $f(x)$ und die Charakteristik $T(r, f)$ von einer Wachstumsordnung

$\omega = \lim_{r \rightarrow 1} \log T(r, f) / \log \frac{1}{1-r}$. Dann hat die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (1 - |z_v|)^{\tau}$ für alle z bis auf höchstens

zwei Ausnahmen den Grenzexponenten $\omega + 1$, d. h. sie konvergiert für alle $\tau > \omega + 1$ und divergiert für alle $\tau < \omega + 1$; für die beiden Ausnahmewerte kann der Grenzexponent niedriger liegen. Ein Randpunkt b heiße nun BP zu β , wenn für alle z bis auf höchstens zwei Ausnahmen obige Reihe β zum Grenzexponenten hat, auch wenn nur die z_v aus einer Teilumgebung im Kreisinneren von b berücksichtigt werden. Jede Funktion positiver Ordnung ω hat wenigstens einen BP zu $\omega + 1$ auf dem Rande. Nach einem früheren Ergebnis des Verf. (vgl. dies. Zbl. 3, 263) gibt es dann zu jedem BP b eine Borelsche Richtung zu $\omega + 1$: schon die z_v aus einem beliebig schmalen Winkelraum um diese Richtung rufen die obigen Divergenzerscheinungen hervor. Weist nun diese Richtung ins Innere des Einheitskreises, so heiße der BP direkt, ist sie Tangente, so heiße er indirekt. Es lassen sich nun sehr einfache notwendige Bedingungen angeben, damit eine Funktion einen direkten BP besitzen kann: Bei regulären Funktionen pflegt man neben $T(r, f)$ noch den Logarithmus des Maximalbetrages, $\log M(r, f)$, zu betrachten, dessen Wachstum nach beiden Seiten durch das von $T(r, f)$ beschränkt ist; notwendig für das Vorhandensein eines direkten BP zu $\omega + 1$ ist nun, daß $\log M(r)$ seine oberen Wachstumschranken erreicht (in dieser Form auch für die Unterklasse der Borelschen Divergenzpunkte zu $\omega + 1$, wo dieser Grenzexponent noch Divergenzexponent der Reihe ist). — Diese Sätze werden durch eine Fülle von Beispielen beleuchtet: Funktionen mit einzelnen BP, mit dichter Menge direkter BP (alle Häufungspunkte sind nur indirekte BP) und Funktionen mit nur indirekten BP. Für die Beispiele können allgemeine Konstruktionsprinzipien gegeben werden. *Ulrich.*

Wolff, Julius: Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 833–834 (1932).

Sei die Funktion $z_1 = x_1 + iy_1 = f(z) = f(x + iy)$ regulär im Bereiche $D(x > 0)$, und sei $x_1 > x$, dann existiert bekanntlich $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_1}{z} = \lambda$, falls $\frac{y}{x}$ beschränkt bleibt; λ ist reell und ≥ 1 . Sei $\lambda > 1$, $z_1 = \lambda z + \omega(z)$, $z_{v+1} = f(z_v)$, $v = 1, 2, \dots$. In Erledigung einer von G. Valiron (in einer gleichbetitelten Arbeit, Bull. Sci. math. 1931; vgl. dies. Zbl. 1, 281) offen gelassenen Frage beweist der Verf. durch eine einfache Abschätzung folgenden Satz: Wenn die Reihe $\sum \left| \frac{\omega(z_v)}{z_v} \right|$ in einem Punkt α des Bereiches D konvergiert, so konvergiert sie überall in D . *Otto Szász* (Frankfurt a. M.).

Milloux, Henri: Sur une inégalité de la théorie des fonctions et ses applications. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 587–589 (1932).

Eine ganze Funktion $g(z)$ werde auf einem Ringstück \Re betrachtet, das aus $r_1 < |z| < r_2$ durch zwei Kurvenbögen ausgeschnitten wird, welche die Kreise verbinden. Es sei m_2 das Maximum von $|g(z)|$ auf dem Randstück von \Re auf $|z| = r_2$, m_1 für den Rest des Randes, und $m_1 < m_2$. Dann wird mit Hilfe einer potentialtheoretischen Abschätzung von $\log |g|$, welche z. B. aus der Jensen-Nevanlinnaschen Formel (nach Carleman) gewonnen werden kann, eine Abschätzung des Ahlfors'schen Verzerrungsintegrals nach oben angeben:

$$\pi \int_r^{r_2} \frac{1}{\Theta(t)} \frac{dt}{t} < \log \log \frac{m_2}{m_1} - \log \log \frac{m}{m_1} + O(1)$$

($m = \max |g(z)|$ für $|z| = r$ und z auf \Re). Diese Abschätzung gestattet sowohl den Beweis bekannter Sätze über ganze Funktionen (Satz von Wiman, Existenz von Konvergenzwegen mit dem asymptot. Wert ∞ u. a. m.) als auch Aussagen über die Ausdehnung der Bögen von $|z| = r$, wo $g(z)$ von der Größenordnung seines Maximalbetrags $M(r, g)$ ist; insbesondere ist diese Methode auch für unendlich hohe Wachstumsordnung brauchbar. *Ulrich* (Marburg, Lahn).

Ahlfors, Lars: Sur une généralisation du théorème de Picard. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 245—247 (1932).

Es wird ein völlig neuer Beweisgedanke für den Picardschen Satz ausgeführt, der sich auf den Verzerrungssatz von Ahlfors stützt; da dieser Satz schon durch den Beweis der Denjoy'schen Vermutung Bürgerrecht erworben hat und zudem sehr einfacher Natur ist, muß der neue Beweisweg dem Bloch-Landauschen als ebenbürtig an die Seite gestellt werden. — Sei $f(z) = w$ eine meromorphe Funktion, \Re ein Kreis der w -Ebene und \mathfrak{B} einer der Bereiche der z -Ebene, wo $f(z)$ Werte von \Re annimmt; jedes \mathfrak{B} ist dabei möglichst groß zu nehmen. Läßt $f(z)$ einen Wert von \Re aus, so erstreckt sich nach dem Maximumprinzip jedes \mathfrak{B} ins Unendliche. — Man betrachte nun 3 Kreise \Re_1, \Re_2, \Re_3 und die Gesamtheit aller zugehörigen Bereiche $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$. Es wird gezeigt: Nicht alle Bereiche dieser Art können sich ins Unendliche erstrecken; das besagt noch etwas mehr als der Picardsche Satz: $f(z)$ kann nicht 3 Werte ganz auslassen. Zum Beweise fassen wir ein Ringstück \Re aus $r_1 \leq |z| \leq r_2$ ins Auge, das seitlich durch zwei verschiedenartige Bereiche $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j$ ($i \neq j$) begrenzt sei, und in dem $f(z)$ keine Werte der dritten Kreisscheibe \Re_k annehme. Um den Ahlfors'schen Verzerrungssatz anzuwenden, bilden wir \Re auf ein Stück des Streifens $0 < \tau < 1$ der $s = (\sigma + i\tau)$ -Ebene so ab, daß seine Ränder gegen $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j$ bzw. in Strecken auf den parallelen Randgeraden des Streifens übergehen. Dann enthält das Bild im Streifen ein Rechteck der Breite 1 und von einer Länge $b - a$, die (bis auf eine numerische additive Konstante) durch das Ahlfors'sche Verzerrungsintegral nach unten abgeschätzt wird:

$$b - a \geq \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\theta(t)} \frac{dt}{t} - 4.$$

$t\theta(t)$ bezeichnet die Länge des Bogens, den \Re mit $|z| = t$ gemein hat. — Anderseits bilden wir die w -Ebene linear so auf eine u -Ebene ab, daß \Re_k in das Äußere des Einheitskreises, \Re_i in einen konzentrischen Teilkreis übergeht. Die zusammengesetzte Funktion u von w, z, s , also $u(s)$, ist auf dem genannten Rechteck dem Betrage nach ≤ 1 , die Differenz ihrer Beträge auf den beiden parallelen Rändern weist eine positive untere Schranke d auf, die nur von der Konfiguration der drei Kreise abhängt. Da das Integral $\int u(s) ds$ über den Rechtecksrand verschwindet, folgt in einer Zeile die Abschätzung $b - a \leq 2/d$. Für jedes Ringstück \Re der bezeichneten Art (Randwerte aus verschiedenen Kreisen \Re_i, \Re_j , Bereiche \mathfrak{B}_k der dritten Art dringen in \Re nicht ein) liegt also das Ahlfors'sche Verzerrungsintegral unterhalb einer festen Schranke $K = 4 + 2/d$. — Das weitere Verfahren läuft nun darauf hinaus, alle Ringstücke dieser Art zwischen zwei festen Kreisen $r_0 \leq |z| \leq r$ aufzusuchen und abzuzählen. Hieraus ergibt sich unter Benutzung der Antithese eine Differentialungleichung und durch deren Integration ein Widerspruch: Nicht alle Bereiche \mathfrak{B} können sich ins Unendliche erstrecken.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Carathéodory, C.: Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden. Math. Z. 34, 758—792 (1932).

Bei den Untersuchungen über konforme Abbildungen in der klassischen Funktionentheorie werden — will man den häßlichen Umweg über die harmonischen Funktionen vermeiden — normale Familien analytischer Funktionen, vor allem stetig konvergente Folgen von Abbildungsfunktionen benötigt. — Der Verf. stellt sich in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe, die allgemeinen Sätze über stetig konvergente Folgen von analytischen Abbildungen in der Ebene auf den Raum von n komplexen Veränderlichen zu übertragen. — Nachdem mehrere vorbereitende Sätze bewiesen sind, wird gezeigt, daß die Grenztransformation einer stetig konvergenten Folge analytischer und zugleich topologischer Abbildungen eines gegebenen, beschränkten und schlichten Gebietes (diese Voraussetzungen über Gebiete werden in der Arbeit durchweg getroffen) selber das Gebiet auch topologisch abbildet, es sei denn, daß für die Grenztransformation die Funktionaldeterminante identisch Null ist. — Mit Hilfe des Begriffes: „Kern einer Gebietsfolge mit dem Grundpunkt 0“ wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die stetige Konvergenz von Folgen topologischer Abbildungen hergeleitet. Hieraus ergibt sich weiter in Verbindung mit einem Satze von Henri Cartan: Ist S eine Abbildung eines Gebietes G mit dem Fixpunkte 0 auf eine G enthaltende Punktmenge, so ist der absolute Betrag der Funktionaldeterminante von S in 0 nie größer als Eins, und nur gleich Eins, wenn S eine ein-eindeutige Abbildung von G auf sich ist. — Im Anschluß hieran wird dann der Begriff des Maximalteilers eines Gebietes aufgestellt.

(Ein Gebiet M , das Maximalteiler von G ist, hat die Eigenschaft, daß es keine topologischen und analytischen Abbildungen mit innerem Fixpunkt von M auf Bereiche gibt, die M umfassen und in G enthalten sind.) Zum Schlusse wird dann der Begriff des Maximalteilers an einzelnen Beispielen erläutert. *Behnke* (Münster i. W.).

Kneser, Hellmuth: Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **41**, 164—168 (1932).

Verf. gibt einen neuen Beweis und zugleich eine Verallgemeinerung des von Hartogs für reguläre, von E. E. Levi für meromorphe Funktionen bewiesenen „Kontinuitätssatzes“: Es sei \mathfrak{G} ein abgeschlossenes beschränktes Gebiet in der z -Ebene und \Re sein Rand. Ist die Funktion $f(w, z)$ meromorph für $w = 0$ und z auf \Re , und gibt es dem Betrage nach beliebig kleine Werte w_0 , derart, daß f meromorph ist für $w = w_0$ und z in \mathfrak{G} , so ist f auch meromorph für $w = 0$ und z in \mathfrak{G} . Während in den früheren Beweisen \mathfrak{G} einfach zusammenhängend vorausgesetzt wird, läßt Verf. auch mehrfach-zusammenhängende Bereiche zu. Wesentlich beim Beweise ist, daß Verf. nicht wie E. E. Levi die Entwicklung der Funktion in eine Laurent-Reihe, sondern das Cauchy- bzw. die Residuenintegrale benutzt. *Thullen* (Münster i. W.).

Geometrie.

Thomsen, G.: Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik und eine neue Art von analytischer Geometrie. *Math. Z.* **34**, 668—720 (1932).

Verf. kennzeichnet in einer ausführlichen Einleitung das Ziel und die prinzipielle Stellung seiner Arbeit im Rahmen der geometrischen Grundlagenforschung. Es handelt sich um eine Begründung der ebenen euklidischen Geometrie auf Grund der Gruppe der kongruenten Abbildungen der Ebene. Diese Gruppe läßt sich erzeugen aus den Spiegelungen an den Punkten und Geraden, ihren einzigen involutorischen Elementen. Die Lagebeziehungen zwischen den Punkten und Geraden (z. B. vereinigte Lage, Parallelismus, Mittellot einer Strecke usw.) lassen sich durch Relationen zwischen Spiegelungen ausdrücken. Ist umgekehrt eine beliebige, aus ihren involutorischen Elementen erzeugbare Gruppe G gegeben und eine Einteilung ihrer involutorischen Elemente in zwei zueinander teilerfremde, nicht leere Klassen, so konstruiert Verf. zunächst abstrakt eine zu dieser Gruppe gehörige Geometrie, indem die Elemente der einen Klasse Punkte, die der anderen Klasse Geraden genannt werden. Die Lagebeziehungen zwischen diesen Punkten und Geraden werden durch die obengenannten entsprechenden Gruppenrelationen definiert. Werden außer den allgemeinen Gruppenaxiomen keine weiteren Voraussetzungen über G gemacht, so sind in der durch G abstrakt definierten Geometrie schon einige Sätze mit den Methoden des Gruppenkalküls beweisbar, z. B. in geeigneter Formulierung der kleine Desarguessche Satz. Verf. nimmt nun schrittweise in Form von einfachen gruppentheoretischen Verwandlungsregeln 5 Zusatzaxiome hinzu (die in der Kongruenzgruppe der euklidischen Ebene erfüllt sind) und untersucht, welche elementar-geometrischen Sätze — geeignet interpretiert — bei jedem Schritt beweisbar werden, z. B. der Satz des Pascal, zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt, und der dazu duale Satz, ferner der Satz von den Höhen, Winkelhalbierenden, Mittellinien und Mittelloten im Dreieck u. ä. Die genannten Zusatzaxiome werden mit einer Ausnahme als voneinander unabhängig nachgewiesen. — Der Ausbau eines leicht zu handhabenden „Gruppenkalküls“ (im Gegensatz zum Hilbertschen „Körperkalkül“) zur Beherrschung der Geometrie ist das Hauptziel des Verf. Die weitere Aufgabe, die Kongruenzgruppe unter allen Gruppen durch innere gruppentheoretische Eigenschaften vollständig zu charakterisieren, wird kurz in einem Anhang behandelt, wo Verf. ein System von 5 Axiomen für die Gruppe G aufstellt; der Beweis, daß die so definierte Gruppe G^* mit der Kongruenzgruppe isomorph ist, wird nur skizziert: Da aus dem Axiomensystem in der durch G^*

abstrakt definierten Geometrie I 1. die Existenz eines Mittellots zu zwei Punkten, einer Mittellinie zu zwei Geraden und 2. alle Voraussetzungen der Hilbertschen Streckenrechnung einschließlich des Pascalschen Satzes folgen, so kann man nach der Methode von Hilbert zu I ein Zahlssystem und zu diesem eine analytische Geometrie Ω konstruieren. Stellt man in dieser Geometrie Ω die aus den Spiegelungen erzeugte Bewegungsgruppe B analytisch dar (was insbesondere wegen 1. möglich ist), so läßt sich vermöge einer passenden eineindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten und Geraden von Ω und resp. den Elementen der beiden Klassen von G^* die Gruppe G^* isomorph auf B abbilden.

Ruth Moufang (Roma).

Mukhopadhyaya, S.: An exposition of the axioms of order of Hilbert. Indian Phys.-Math. J. 3, 33–41 (1932).

Der Verf. bezeichnet zwei einfache Sätze, die in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ hinter den Anordnungsaxiomen als unmittelbare Folgerungen aufgeführt sind (1. Aufl., Satz 4 und 5), als left unproved und bringt für sie sowie auch für einige andere unmittelbare Folgerungen Beweise. Sämtliche weiteren Bemerkungen sind — insbesondere durch die Untersuchungen von Moore, Veblen und Huntington — seit langem überholt.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Ascoli, Guido: Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 10, 33–81 (1932).

Eine abgeschlossene Punktmenge eines linearen metrischen Raumes S , die zu je zweien ihrer Punkte auch deren Verbindungsgerade enthält, wird als lineare Mannigfaltigkeit bezeichnet; eine lineare Mannigfaltigkeit $\neq S$, die nicht echter Teil einer anderen linearen Mannigfaltigkeit $\neq S$ ist, wird als Hyperebene bezeichnet; es werden die einfachsten Eigenschaften dieser Hyperebenen entwickelt. Definition und einfachste Eigenschaften der konvexen Körper in einem linearen metrischen Raume; einige naheliegende Beispiele; der konvexe Kegel, der entsteht, indem man von einem Randpunkte eines konvexen Körpers die Punkte dieses Körpers durch Halbgerade projiziert. Der von den linearen, stetigen Funktionen in S gebildete, zu S duale oder reziproke Raum. In diesen recht ausführlich dargelegten Untersuchungen kommt der Verf. kaum über bekannte Resultate hinaus. Es folgen Anwendungen auf den Raum der Folgen $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, für die $(\sum |x_n|^p)^{1/p}$ konvergiert ($p \geq 1$), auf den Raum der konvergenten unendlichen Reihen, der Funktionen $x(P)$, für die $|x(P)|^p$ ($p \geq 1$) summierbar ist, auf den Raum der stetigen Funktionen; einige hübsche Bemerkungen über die Geometrie in diesem letzten Raume. Einiges Gewicht legt der Verf. auf das Resultat, daß das System aller im Innern eines beschränkten abgeschlossenen Bereiches eines euklidischen Raumes harmonischen Funktionen $x(P)$, für die $|x(P)|^p$ ($p \geq 1$) summierbar ist (ebenso das System der harmonischen Funktionen, die in ganzen Bereiche stetig sind), eine abzählbare Basis besitzt.

Hans Hahn (Wien).

Bose, R. C.: On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval. Math. Z. 35, 16–24 (1932).

Es werden geschlossene konvexe Kurven in der Ebene betrachtet, die stetigen, zwischen positiven Grenzen variierenden Krümmungsradius haben und die von jedem Kreis in einer beschränkten Anzahl von Punkten geschnitten werden. Eine solche Kurve hat nur endlich viele Krümmungskreise, die ganz von der Kurve umschlossen werden. s sei ihre Anzahl. Ferner existieren nur endlich viele Kreise, die in der Kurve enthalten sind und sie in drei Punkten berühren. Ihre Anzahl sei t . Es wird bewiesen, daß zwischen s und t die Beziehung $s = t + 2$ besteht. (Analoges gilt für Kreise, die die Kurve umschließen.) Hieraus folgt wegen $t \geq 0$, daß jedes der betrachteten Ovale wenigstens zwei Krümmungskreise umschließt. Und hieraus eine Abschätzung von Hayashi für die Minima der Krümmungsradien. Aus $s = t + 2$ folgt ferner ein Satz von Juel über einfache Ovale. Ein Oval heißt nach Juel einfach, wenn es von jedem Kreis in höchstens vier Punkten geschnitten wird.

W. Fenchel (Göttingen).

Süss, Wilhelm: Zusammensetzung von Eikörpern und homothetische Eiflächen. Tôhoku Math. J. 35, 47—50 (1932).

1. Wird das Produkt $R_1 R_2$ der Hauptkrümmungsradien als Funktion auf der Einheitskugel so vorgeschrieben, daß der Schwerpunkt der mit Masse der Dichte $R_1 R_2$ belegten Kugel in den Mittelpunkt fällt, so ist dadurch nach Minkowski eine Eifläche eindeutig bestimmt. Sind nun zwei Eiflächen mit den reziproken Gaußschen Krümmungen $R_1 R_2$ bzw. $R'_1 R'_2$ gegeben, so ist hiernach durch $t R_1 R_2 + (1 - t) R'_1 R'_2$ wieder eine Eifläche bestimmt. Herglotz hat gezeigt, daß die dritte Wurzel des von dieser Fläche umschlossenen Volumens eine konkave Funktion des Parameters t ist. Dies wird sehr einfach aus Minkowskis Ungleichungen für die gemischten Volumina gefolgert. 2. Auf Grund eines zum genannten Minkowskischen völlig analogen Satzes von Christoffel können die Summen der Hauptkrümmungsradien in derselben Weise linear kombiniert werden. In diesem Fall ist die Quadratwurzel der Oberfläche eine konkave Funktion des Scharparameters. 3. Ferner wird für den folgenden Satz ein einfacher Beweis angegeben: Besitzen zwei Eiflächen für jede Richtung ähnlich und ähnlich gelegene Orthogonalprojektionen, so sind sie selbst ähnlich und ähnlich gelegen. *W. Fenchel* (Göttingen).

Dobell, H. A.: On the geometry of the triangle. Amer. Math. Monthly 39, 71—85 (1932).

Durch die Gleichungen $x = X + iY$, $y = X - iY$ werden rechtwinklige cartesische Koordinaten X, Y in „konjugierte Koordinaten“ transformiert. Konjugierte Koordinaten merkwürdiger Dreieckspunkte. Beweis einiger Sätze aus der neueren Dreiecksgeometrie. Zusammenhang mit projektiven Koordinaten. *Weiss* (Bonn).

Gallucci, Generoso: La trasformazione ortocentrica nello spazio. Contributo alla geometria del tetraedro. Note Esercit. mat. 6, 19—29 (1931).

Der variable Punkt M ergänze das feste Dreieck ABC zu einem Tetraeder. Dann wird die quadratische Verwandtschaft untersucht, die dem Punkte M das Orthozentrum des Tetraeders zuordnet. *E. A. Weiss* (Bonn).

White, H. S.: The plane figure of seven real lines. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 59—65 (1932).

Cummings, Louise D.: Hexagonal systems of seven lines in a plane. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 105—110 (1932).

Es werden Systeme von 7 reellen Geraden, von denen keine 3 durch einen Punkt laufen, in der projektiven Ebene klassifiziert. Zwei Systeme dieser Art gelten als äquivalent, wenn sie nach geeigneter Zuordnung ihrer Geraden durch stetige Deformation in einander übergeführt werden können, ohne daß während der Deformation Schnittpunkte des Systems zusammenfallen. Die erste Arbeit beschäftigt sich mit dem Fall, daß von den 7 Geraden 5 ein konvexes 5-Seit bilden, die Figur aber kein 6-Seit enthält. Werden dann die Eckpunkte des 5-Seits mit $0, \dots, 9$ bezeichnet, so wird eine 6. Gerade, welche die 5 Seiten etwa innerhalb der Strecken 82, 23, 31, 57, 76 schneidet, mit 8231.576 bezeichnet. Unter Benutzung dieser Bezeichnung wird durch systematisches Probieren das Resultat gefunden, daß die 5 Geraden durch Hinzufügen von 2 anderen Geraden zu 3 nicht äquivalenten Systemen von 7 Geraden mit konvexem 5-Seit und ohne 6-Seit ergänzt werden können.

Die zweite Arbeit behandelt den Fall eines Systems mit konvexem 6-Seit. Die Ecken des 6-Seits werden mit $1, \dots, 6$; a, \dots, f ; L, M, N bezeichnet, und eine 7. Gerade, etwa $a123b \cdot cL \cdot fM$ erhält die Charakteristik $(4, 1, 1)$. Das System der Charakteristiken jeder der 7 Geraden mit Bezug auf die übrigen 6 gibt das Charakteristikensystem der Linienfigur. Mit seiner Hilfe gelingt es, 8 nichtäquivalente Systeme zu unterscheiden. Dabei zeigt sich, daß die Gleichheit der Anzahlen der in zwei Systemen enthaltenen 3-Seite, 4-Seite, ... für die Äquivalenz dieser Systeme nicht hinreichend ist. *E. A. Weiss* (Bonn).

Room, T. G.: Configurations of spaces which osculate normal rational curves. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 367—383 (1932).

Im Anschluß an eine Arbeit von Grace [Proc. Cambridge Philos. Soc. 25 (1929)] werden in der Hauptsache folgende Sätze bewiesen: 1. Es gibt im R_{p^2-3} eine und nur eine rationale Normalkurve, die $p+2$ Räume R_{p-2} oskuliert (d. h. in $p-1$ „konsekutiven“ Punkten schneidet). Konstruktion der Berührungspunkte. 2. Im $R_{p^2-3-m(p+1)}$ ist für die Existenz einer Normalkurve, welche $p+2$ R_{p-m-2} oskulieren soll, notwendig und hinreichend, daß diese Räume einen gemeinsamen Transversal- R_{p-m-3} besitzen. Der Beweis von 1 wird ausführlich an Hand des typischen Beispiels $p=4$ geführt: Im R_{13} haben 5 Ebenen einen gemeinsamen Transversal- R_3 . 6 Ebenen h_e bestimmen also sechs $R_3 k_e$. Es existiert dann eine Gerade g , welche die Verbindungs- $R_6 h_e k_e$ trifft. Diese Gerade g , gewisse in den Ebenen der Figur gelegene C^2 und in den R_3 der Figur verlaufende C^3 spielen die Hauptrolle beim Beweise und bei der Konstruktion der Berührungspunkte der die 6 Ebenen oskulierenden C^6 sowie ihrer Tangenten in diesen Punkten. Die Gerade g , die C^2 und C^3 und ihre Beziehungen zur „Doppelsechs“ werden durch Projektion einer einfacheren Figur von $2 \cdot 6 R_3$ des R_{18} gewonnen. Als typisches Beispiel für Satz 2 wird die Bedingung dafür abgeleitet, daß 7 Ebenen des R_{16} eine gemeinsame oskulierende C^{16} zulassen. E. A. Weiss (Bonn).

Bose, R. C.: Generalisation of Roeser's correspondence between certain types of polyhedra in non-Euclidean space. Indian Phys.-Math. J. 3, 43—51 (1932).

Der Verf. gibt eine Verallgemeinerung der bekannten Roesers Ergebnisse über die komplementären Körper der beiden nichteuklidischen Geometrien (Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 6. Abh., 1928). Er legt statt der Formeln der hyperbolischen Trigonometrie die Konfigurationen des vierdimensionalen Raumes zugrunde. Wenn $OXNY$ ein mit zwei rechten Winkeln X und Y hyperbolisches Viereck ist, so wird ein Lot NQ zu seiner Ebene im Eckpunkt N und durch die Eckpunkte O, X, Y die Parallele zu diesem Lot gezogen. Weiter nehmen wir eine Einheitskugel mit einem Zentrum O , welche die Strahlen OX, OY, OQ in den Punkten P, Q, S trifft, dann wird das Viereck $OXNY$ dem Eckpunkt S des sphärischen Dreiecks PQS entsprechend angesehen; den Eckpunkten P und Q entsprechen ihre eigenen Vierecke. Wenn man die Seiten PS und QS des sphärischen Dreiecks PQS weiter zieht bis zu den Punkten U, V , $PU = QV = \pi/2$ und den Pol K der Seite PQ nimmt, so hat das sphärische Viereck $KUSV$ rechte Winkel in den Gegenpunkten U, V und wird dem Eckpunkt S entsprechend angesehen. Jeder von den Eckpunkten P und Q hat sein eigenes sphärisches Viereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln. So bestimmt jedes Viereck (hyperbolisch oder sphärisch) mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln 6 solcher Vierecke, zu deren Anzahl es gehört; drei davon sind hyperbolisch und drei sphärisch. Diese Betrachtungen werden auf die Körper ausgedehnt. Wenn man das Hexaeder im dreidimensionalen Raum nimmt, so wird das Lot zu seinem Raum gezogen (im vierdimensionalen Raum), dabei werden alle analogen Konstruktionen vom Verf. durchgeführt. So erhält der Verf. acht assoziierte Hexaeder (vier sphärische und vier hyperbolische). — Komplementäre Roesersche Körper stellen spezielle Arten dieser Konfigurationen vor. Zum Schluß zeigt der Verf. an, daß seine Konstruktionen im vieldimensionalen Raume ausführbar sind. Nil Glagoleff (Moskau).

Pleskot, Ant.: Sur une correspondance de courbes se rattachant à la théorie de roulettes. Čas. mat. fys. 61, 137—145 u. franz. Zusammenfassung 145 (1932) [Tschechisch].

Seifert, L.: Contribution à la théorie de la courbe rationnelle du cinquième degré. Čas. mat. fys. 61, 146—152 u. franz. Zusammenfassung 152 (1932) [Tschechisch].

Jeřábek, V.: Sur deux courbes du sixième ordre. Čas. mat. fys. 61, 130—136 u. franz. Zusammenfassung 136 (1932) [Tschechisch].

Neelley, J. H.: Concerning the possibility of certain binary quartics being line sections of the plane quartic curve of genus zero and the complete system of independent forms of two binary quartics. (*Carnegie Inst. of Technol., Pittsburgh, U. S. A.*) Tôhoku Math. J. **35**, 51—59 (1932).

Das Formensystem von zwei binären Formen 4. Ordnung — es wird ohne Beweis in unsymbolischer Gestalt angegeben — steht in Beziehung zur Theorie der ebenen rationalen Kurve 4. Ordnung. Es wird die Frage behandelt: Unter welchen Voraussetzungen sind die 4 Nullstellen gewisser biquadratischer Formen des Systems kollinear? *E. A. Weiss.*

Haenzel, Gerhard: Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung. J. reine angew. Math. **166**, 167—181 (1932).

Jolles hat den Begriff der (primären oder sekundären) Involution in einer linearen Strahlenkongruenz synthetisch eingeführt. Verf. leitet zunächst die zugehörigen analytischen Formeln ab. Ferner wird diese Involution in Beziehung gesetzt zu den Kollineationen des projektiven R_3 (Elementarteilertheorie), den nichteuklidischen Bewegungen des R_3 und den Kollineationen des R_4 . Die sekundären Involutionen stehen im Vordergrund der Betrachtung. Die Realitätsverhältnisse werden stets mitberücksichtigt.

Cohn-Vossen (Köln).

Tortorici, Pietro: Le congruenze W_{ab} a parametro medio costante. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 22—28 (1932).

Unter Benutzung einiger seiner allgemeinen Formeln konstruiert Verf. die vollständige Klasse der W -Kongruenzen mit konstantem „parametro medio“, d. h. die Klasse der W -Kongruenzen mit konstantem parametro medio, die als Brennflächen zwei Regelflächen besitzen, von denen die eine zu einer Ebene parallele Erzeugende hat. — Es ist bemerkenswert, daß jede dieser Brennflächen auf ein Rotationshyperboloid abwickelbar ist.

Autoreferat.

Delens, Paul: Sur la représentation sphérique des congruences. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 509—511 (1932).

Il Delens continua a render noti, senza dimostrazione, i risultati dei suoi studi di geometria differenziale delle congruenze di curve. Ne considera, al modo ben noto, la rappresentazione sferica individuata dai punti A di una sfera e quella della congruenza delle linee e delle superfici isoseline definite in precedenti note, venendo ad individuare sulla sfera rispettivamente un punto e una curva sferica. Studia quindi le trasformazioni (T_1) del campo vettoriale formato dalle tangenti della congruenza e che conservano le linee isocline e la cui immagine sferica é una trasformazione puntuale di A ; mentre che una trasformazione associata al vettore tangente d'una isoclina fa corrispondere una semplice infinità di vettori le cui immagini sferiche formano una curva e individuano, sulla sfera, una trasformazione di contatto. L'A. considera alcune equazioni differenziali connesse con tali trasformazioni e ne mostra alcune applicazioni geometriche, molto interessanti.

R. Marcolongo (Napoli).

Bompiani, E.: Invarianti d'intersezione di due curve sghembe. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **14**, 456—461 (1931).

Seien C und \bar{C} zwei sich in einem Punkte O schneidende, jedoch nicht berührende Raumkurven, deren Schmiegeebenen in O sich entweder in einer weder C noch \bar{C} in O berührenden Geraden schneiden oder zusammenfallen. Dann gibt es zwei bzw. drei Punkte, aus denen C und \bar{C} in zwei ebene Kurven mit Berührung dritter Ordnung projizieren. Dies Ergebnis wird auf asymptotische Flächenkurven angewandt, woraus neue Definitionen der Darboux-Tangenten, des Darboux-Büschels und der Greenschen Geraden folgen. Andere Anwendungen werden in Aussicht gestellt. *Čech (Brno).*

Hilton, Harold: On the affine curvature and projective normal of a plane curve. Tôhoku Math. J. **35**, 8—18 (1932).

Nach einem Hinweis auf einige Formeln der affinen Geometrie der ebenen Kurven werden Kurven 2. und 3. Ordnung untersucht, welche die ebene Kurve in 6 bzw. 9 kon-

sekutiven Punkten berühren, ferner wird die Projektivnormale erklärt. Mit Unterdrückung der langwierigen Zwischenrechnungen werden die Gleichungen dieser Gebilde in geeigneten affinen Koordinaten angegeben. Im zweiten Teil werden Ergebnisse über geometrische Gebilde angegeben, die mit der ebenen Kurve affinvariant verbunden sind und bis zu 9 konsekutive Punkte mit ihr gemeinsam haben (Kurven 3. und 4. Ordnung und ihr Zusammenhang mit der Affin- und Projektivnormalen).

H. Schatz (Innsbruck).

Archbold, J. W.: The general surfaces in four dimensions with one or two apparent triple points. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 28, 51—54 (1932).

A new method for obtaining all general surfaces (already known) in S_4 , which have one or two apparent triple points. By this method it appears a posteriori that every such surface is the residual intersection of two cubic hypersurfaces passing through a properly chosen ruled surface.

O. Zariski (Baltimore).

Sorrentino-Giordano, Rosaria: Rappresentazione d'uno spazio lineare a quattro dimensioni mediante le coppie ordinate dei punti d'un piano. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 69, 149—161 (1931).

This paper deals with the representation of the points of a four-space S_4 on oriented pairs of points in a plane. This representation has been used by E. Müller, "Jber. Deutsch. Math.-Vereinig." 14, 573 (1905). In S_4 a two-plane σ is taken and two skew straight lines s' , s'' , which have no point in common with σ . An arbitrary point P of S_4 determines with s' and with s'' two planes π' and π'' which each have a point P' , P'' in common with σ . This pair, $P' P''$, taken in this order, determine P in an unique way. In this paper are studied the representation of a straight line, of a plane, and of a threespace.

D. J. Struik (Cambridge).

Winkelmann, Max: Über Biegung, Windung, Drillung und Verdrehung. (Zur kinematischen Differentialgeometrie der freien Raumkurven und Flächenstreifen.) *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 41, 190—205 (1932).

Rabaté, G.: Sur les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. s. 23, 1—60 (1931).

Vgl. dies. Zbl. 2, 54.

Guarnaccia, Clelia: Geodetiche su certe superficie dotate di linee angolose e punti conici. *Note Esercit. Mat.* 6, 51—60 (1931).

König, Robert: Zur Grundlegung der Tensorrechnung. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 41, 169—189 (1932).

Kurze Skizze eines Systems von Grundbegriffen der Tensoranalysis. Es werden behandelt: I. Der lineare Vektorraum. II. Die im kleinen lineare Mannigfaltigkeit oder der „leere Raum“. III. Der leere Raum, in dem jeder Punkt außer dem Raum der Differentiale noch einen „angehefteten“ linearen Raum trägt, für dessen Tensoren eine lineare Übertragung definiert ist. IIIa. Der affin zusammenhängende Raum. IV. Der affin zusammenhängende Raum mit in jedem Punkt angeheftetem linearem Raum. Für alle diese Fälle werden die zulässigen, d. h. invarianten Operationen angegeben.

van der Waerden (Leipzig).

Thomas, Tracy Yerkes: Conformal tensors. II. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 18, 189—193 (1932).

The author deals with the exceptional cases which arose in his previous note (see this Zbl. 3, 365). Let $T_r^p \dots^q$ be a tensor for which $K = 0$, and form the "augmented tensor" $T_r^p \dots^q \equiv V_t T_r^p \dots^q$, where the constants V_i defined by $V_\mu \equiv 0$, $V_\infty \equiv 1$ constitute a conformal vector of weight $-2/(n+2)$. The new tensor has a law of transformation algebraically equivalent to that of the original tensor T , but is such that $K = -2$. So by finding the conditions of integrability of the equations of transformation, its complete covariant derivative can be formed as in Note I. A repetition of the process leads to a succession of complete covariant derivatives of the

original tensor T . The method is applicable to similar exceptional cases arising in the consideration of the tensor $D_{\rho \dots \sigma \mu \nu}^{\rho \dots \sigma}$ of Note I, and hence (n even) to the formation of the complete curvature tensor and its covariant derivatives, which, together with the fundamental tensor, constitute a complete set of invariants of the conformal Riemann space.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Churchill, R. V.: On the geometry of the Riemann tensor. Trans. Amer. Math. Soc. 34, 126—152 (1932).

At any point of a four-dimensional Riemann space a tensor of the second type is determined by a skeleton (that is, a set of four mutually perpendicular directions intrinsically related to the tensor) and three numbers. Moreover the skeleton is uniquely determined by this tensor. A tensor of the first type is determined by a skeleton and five numbers, but the skeleton is not uniquely determined by this tensor. From any one skeleton and its set of five numbers five other skeletons with their corresponding sets of five numbers can be found. Each of these six skeletons with its set of numbers serves in the same way in the determination of their tensor. It has been shown that the Riemann tensor at any point is the sum of a tensor of the first type and a tensor of the second type. Hence the Riemann tensor at a point of a four dimensional space is determined by two skeletons and eight numbers. In this paper most of the results are obtained by using six-vectors for the arguments of the Riemann tensor after a restatement and extension of the theory of six-vectors is made. [Autoreferat aus Bull. Amer. Math. Soc. 35, 154 (1929).] *Ruse (Edinburgh).*

● **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Unter Mitwirkung v. Kurt Gödel u. Georg Nöbeling. Hrsg. v. Karl Menger. H. 1. Vorbemerkung des Herausgebers. Gesammelte Mitteilungen der Jahre 1928/29.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. 31 S. RM. 2.—

● **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Unter Mitwirkung v. Kurt Gödel u. Georg Nöbeling. Hrsg. v. Karl Menger. H. 2. Bericht über das Kolloquium 1929/30. Gesammelte Mitteilungen des Jahres 1929/30.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. 38 S. RM. 2.—

Berichte über Vorträge aus den Gebieten der Topologie, Mengenlehre, Grundlagen der Geometrie, allgemeine Grundlagenfragen usw. aus den Jahren 1928—1930.

Quantentheorie.

● **Frank, Philipp: Das Kausalgesetz und seine Grenzen. (Schriften z. wiss. Welt-auffassung. Hrsg. v. Philipp Frank u. Moritz Schlick. Bd. 6.)** Wien: Julius Springer 1932. XV, 308 S. u. 4 Abb. RM. 18.60.

Mit der Überzeugung, daß das Nachdenken über Raum, Zeit, Kausalität zur Zuständigkeit des Physikers gehört, wird versucht, den wissenschaftlichen Kern der Frage nach der Kausalität herauszuarbeiten und auf streng wissenschaftlichem Wege zu beantworten. Da Sätze von großer Allgemeinheit Gefahr laufen, sinnlos zu werden, werden die exakten Formulierungen des Kausalgesetzes in verschiedenen Gebieten der Physik aufgesucht. Ihnen stellten sich Strömungen entgegen, die für andere Gebiete der Physik oder für die Lebenserscheinungen eine Lockerung wollten. Ihrer kritischen Betrachtung folgt eine Untersuchung über die Bedeutung der neuen Quantenmechanik für die Frage und der Schwierigkeiten, auf die die Formulierung eines allgemeinen Kausalgesetzes stößt. Eine Analyse der Begriffe Wirklichkeit, Grenzen der Wissenschaft bildet den Abschluß. — Das Buch bildet eine scharfsinnige und klare Durcharbeitung von allgemeinen Fragen, die jedem Wissenschaft treibenden aufstoßen. Es werden wohl gelegentlich offene Türen eingeannt, andererseits wird einer Reihe von Meinungen, die in den letzten Jahrzehnten auftauchten, kritisch zu Leibe gegangen. Gerade dem Leser, der das Buch vielleicht spontan nicht voll bejaht, weil er etwa schon den ersten Satz vom Ziel der Wissenschaft (aus unmittelbaren Erleb-

nissen spätere vorauszusagen) für zu eng hält, sei empfohlen, über diesen Satz hinauszulesen und sich mit dem Buch auseinanderzusetzen. *F. Hund* (Leipzig).

Eddington, Arthur: The decline of determinism. *Nature* (London) **1932 I**, 233—240.

Es wird ohne Verwendung mathematischer Formulierungen dargelegt, wie in der physikalischen Entwicklung des letzten Jahrhunderts statistische Aussagen ständig vordringen und schließlich (Heisenbergs Unschärferelation) die „deterministischen“ vollständig verdrängen. Das Ergebnis wird durch eine Reihe anschaulicher und witziger Gleichnisse verdeutlicht. Dem „Indeterminismus des Geistes“ werde im Gegensatz zur klassischen Physik durch die Quantenmechanik wieder ein gewisser Spielraum gelassen. Die Quantenmechanik stehe daher den naiven Auffassungen des „vernünftigen Menschen“ näher als die klassische Physik. *E. Zilsel* (Wien).

Vleck, J. H. van: Some mathematical aspects of the new physics. *Amer. Math. Monthly* **39**, 90—96 (1932).

Verf. erörtert die Integration der Schrödinger-Gleichung (Wellengleichung) bei Atomproblemen und gibt Beispiele für die verschiedenen hier anwendbaren Integrationsmethoden. 1. Einfache Integration; Beispiel: Atom in eindimensionaler Potentialgrube. 2. Reihenlösung; Beispiel: Hermite'sche Polynome beim eindimensionalen Oszillator. 3. Numerische Integration, kein Beispiel. 4. Störungsrechnung; Beispiel: Mathieusche bzw. Hillsche Differentialgleichung beim eindimensionalen Atomgitter.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Fermi, Enrico: Quantum theory of radiation. *Rev. Modern Physics* **4**, 87—132 (1932).

Zusammenfassung einer Reihe von Gastvorlesungen an der Universität Michigan, worin mit verhältnismäßig einfachen (nur wellenmechanischen) Rechnungen ein Überblick über das Gesamtgebiet der Diracschen Strahlungstheorie und die daran anschließenden Probleme der Quantenelektrodynamik gegeben wird. Das Strahlungsbzw. statische Feld ist dabei stets durch die Eigenzustände eines Hohlraums beschrieben; für die beteiligten Eielektronenatome wird sowohl die Schrödingersche, als später die Diracsche relativistische Hamilton-Funktion zugrunde gelegt. Eine Reihe von Beispielen illustriert die neue Auffassung: Die von einem angeregten Atom ausgehende Emission einer Spektrallinie endlicher Breite und die Lebensdauer des angeregten Zustands werden berechnet. Ferner die Absorption der emittierten Strahlung durch ein zweites Atom nicht vor Ablauf der Latenzzeit, also die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zugestrahelter Wirkungen, sowie das Auftreten von Interferenzstreifen durch stehende Wellen am Spiegel. Das Zustandekommen des Doppler-Effekts, der kohärenten und inkohärenten Streuung an freien Elektronen, wird nach der Auffassung früherer und der neuen Theorien verglichen und es wird in einfacher Weise die formale Mitwirkung der Zustände „negativer Energie“ des Diracschen Elektrons dargetan. Zum Schluß geht der Autor kurz auf die noch ungeklärten Probleme der Diracschen Theorie des Elektrons und die damit zusammenhängenden Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik ein. Eine Zusammenstellung der wesentlichen Literaturstellen vervollständigt die Arbeit, die als kurze gründliche Einführung in die ganze Theorie von Bedeutung ist.

Fues (Hannover).

Mukherjee, K. K.: A note on wave statistics. (*Phys. Res. Labor., Presidency Coll., Calcutta.*) *Indian Phys.-Math. J.* **3**, 3—8 (1932).

Für die früher beschriebenen Phasenraumwellen wird ein Stromausdruck aufgestellt, der dem Strom der Quantenmechanik nachgebildet ist. *Fues* (Hannover).

Mukherjee, K. K.: Correspondence of wave statistics with classical mechanics. *J. Indian Math. Soc.* **19**, 119—125 (1931).

Bekannte Erwartungswert-Sätze erlauben aus der Wellenmechanik die Aussagen der klassischen Mechanik zurückzugewinnen. Diese Sätze und ihre Ableitungen werden in die Gedankenwelt der Phasenraumwellen übertragen, die vom Verf. und von K. C. Kar früher beschrieben wurde. *Fues* (Hannover).

Kar, K. C.: On the viscosity of the phase space. (*Phys. Res. Labor., Presidency Coll., Calcutta.*) Indian Phys.-Math. J. 3, 1—2 (1932).

Fortsetzung früherer Spekulationen über Wellen im Phasenraum. *Fues.*

Hylleraas, Egil A.: Die Wellengleichung des Keplerproblems im Impulsraum. *Z. Physik* 74, 216—224 (1932).

Mit der zunächst abgeleiteten Beziehung

$$gf = \frac{\hbar}{e^{2\pi i}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} + \dots \right] fg,$$

wo g und f Funktionen der nichtkommutativen kanonischen Variablen p_k, q_k sind, wird die Energiegleichung

$$\frac{1}{2m} p^2 - \left(E + \frac{e^2}{r} \right) = 0$$

des Keplerproblems umgeformt zu folgender Wellengleichung für den Impulsraum:

$$\left(p^2 - 2mE \right)^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \right] + 6(p^2 - 2mE) \left[p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + p_z \frac{\partial}{\partial p_z} + 2 \right] + 2m(E + 4Rh) = 0. \quad (*)$$

Aus dieser Gleichung können die Eigenwerte und die zum Impulsraum gehörigen Eigenfunktionen des Keplerproblems durch Integration erhalten werden; man kommt so auf schnellstem Wege zu den schon von Podolsky und Pauling auf andere Weise (Fourieranalyse der Schrödingerschen Eigenfunktionen im Koordinatenraum) abgeleiteten Ergebnissen. Mit Hilfe der die Differentialgleichung

$$(1 - \zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} - (2l + 3) \zeta \frac{d}{d\zeta} + n^2 - (l + 1)^2 = 0$$

erfüllenden Gegenbauerschen Funktionen

$$C_{n-l-1}^{l+1}(\zeta) = P_{n-\frac{1}{2}}^{(l+\frac{1}{2})}(\zeta)$$

sind die Eigenfunktionen von (*) gegeben durch

$$\Psi_{nlm} = \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)^{l+2}} P_{n-\frac{1}{2}}^{(l+\frac{1}{2})} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \right) \cdot P_l^m(\theta) e^{im\Phi};$$

dabei ist $\xi = n |p| / |p|_0$, wo $|p|_0$ der Impulsbetrag für den Grundzustand bedeutet, während θ, Φ Polarkoordinaten im Impulsraum sind. *P. Jordan* (Rostock).

Brogie, Louis de: Remarques sur les intégrales premières de la mécanique ondulatoire. *C. R. Acad. Sci., Paris* 194, 693—695 (1932).

Eine wellenmechanische Größe $A = A(t)$ ist zeitlich konstant (ein Integral der Bewegungsgleichungen), wenn sie die Eigenschaft

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial A}{\partial t} + (AH - HA) = 0$$

besitzt, wo H die Energiematrix ist. (Die Zeit wird hier und im folgenden als eine Zahl aufgefaßt.) Das gilt z. B. für diejenige zeitabhängige Funktion $A(t) = A(t, x, p)$ der Koordinaten und Impulse, welche dauernd gleich dem zur Zeit $t=0$ von der Funktion $A(0, x, p)$ angenommenen Werte A_0 bleibt. (Beispiel: $x - \frac{p}{m}t$ ist bei einem freien Massenpunkt ein Integral.) Es wird auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß

$$A(t) = U(t)A_0U^{-1}(t)$$

ist, wo $U(t)$ denjenigen Operator bedeutet, welcher für $t=0$ zu 1 wird, und ferner aus einer jeden Koordinatenfunktion $\psi^0(x)$ eine Lösung $\psi(x, t) = U(t) \cdot \psi^0(x)$ der Schrödingergleichung

$$\left(H - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x, t) = 0$$

hervorgehen läßt.

P. Jordan (Rostock).

Ellis, C. D.: Nomenclature for lines in the β -ray spectra of radioactive bodies. (*Cavendish Labor., Cambridge.*) *Nature* 1932 I, 276—277.

Um den Vergleich von Angaben über die Energie sekundärer β -Linien zu erleichtern, wird vorgeschlagen, an Stelle der bisherigen Angabe des $H \cdot \rho$ -Wertes jeweils für die einzelnen Linien eines bestimmten Präparates (auch wenn dieses mehrere radioaktive Komponenten enthält) je nach ihrer absoluten Intensität Bezeichnungen einzuführen. Die stärksten Linien sollen durch große Buchstaben bezeichnet werden, die schwächeren durch einen oder mehrere angefügte Indizes, so daß aus der Angabe die Lage jeder Linie relativ zu den nächststärkeren ersichtlich ist. *G. Beck.*

Narliker, V. V.: The highest atomic number. (*Fitzwilliam House, Cambridge.*) *Nature* 1932 I, 402.

Die Note macht darauf aufmerksam, daß in Eddingtons Theorie der Elementarteilchen gerade 91 „Drehungen“ existieren, welche sowohl die verallgemeinerte Wechselwirkungsenergie $\sum_{s=1}^{16} E_s E'_s / 137r$ als einen mit der Vertauschbarkeit der Ladungsträger verknüpften Ausdruck $\sum_{s=1}^{16} E_s E'_s$ invariant lassen. Falls die Anzahl dieser Freiheitsgrade irgendwie für die Mannigfaltigkeit der unabhängigen Wellenformen maßgebend wäre, könnte man nach Meinung des Autors schließen, daß es Atome mit gerade noch $91 + 1 = 92$ Elektronen geben kann, und nicht mehr. *Fues (Hannover).*

Rutherford, Lord: Origin of the gamma rays. *Nature* 1932 I, 457—458.

Ehrenberg, W., und K. Schäfer: Bericht über Atomfaktoren. (*Phys. Inst. u. Röntgenlabor., Techn. Hochsch., Stuttgart.*) *Physik. Z.* 33, 97—122 (1932).

Darstellung der Theorie der Atomformfaktoren und sorgfältige Diskussion der vorliegenden Messungen. *H. Bethe (Roma).*

Milanezuk, B.: Zeemaneffekt der Quadrupollinien nach der Diracschen Theorie. (*Inst. f. Theoret. Physik, Techn. Hochsch., Lemberg.*) *Z. Physik* 74, 810—824 (1932).

Segrè, E.: Righe di quadrupolo negli spettri dei raggi X. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s.* 14, 501—505 (1931).

Der Verf. behandelt die Frage der Durchbrechung der Auswahlverbote in den Röntgenspektren. In den optischen Spektren kann das Auftreten verbotener Linien beruhen 1. auf äußeren oder inneren Störungen des emittierenden Atoms, die eine teilweise Aufhebung des Übergangsverbots bewirken, 2. auf einer spontanen Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den nicht kombinierenden Zuständen unter Quadrupolstrahlung. Linien des ersteren Typs sind z. B. die P-P-Kombinationen in den Spektren der Alkalien und Erdalkalien. Allgemeine Bedingungen für Übergänge dieses Typs ist, daß die beiden unter dem Einfluß der Störung kombinierenden Terme mit einem dritten Zustand kombinieren, wobei die Intensität der verbotenen Linie im wesentlichen von dem Quadrat der Übergangswahrscheinlichkeiten zu diesem Zustand und der Energiedifferenz zu diesem abhängt. Derartige Übergänge kommen nur dann mit einiger Wahrscheinlichkeit vor, wenn der dritte Zustand energetisch sehr nahe dem einen der beiden Zustände, die unter dem Einfluß der Störung kombinieren, benachbart ist. Zu dem zweiten Typus der verbotenen Linien gehören im optischen Gebiet z. B. die grüne Nordlichtlinie, sowie einige S-D-Kombinationen der Alkalien, sowie die bekannten Linien des Nebulium-Spektrums. Die Intensität der Quadrupolstrahlung hängt im wesentlichen von $(\lambda/r)^2$ ab, wo r im wesentlichen den Bahnradius der betreffenden Bahn (bzw. das dem Zustand zugeordnete lineare Matrixglied) bedeutet. Als Auswahlregeln für Quadrupol-Übergänge gelten: $\Delta L = \pm 1, 2$, oder 0, außer $0 \leftrightarrow 0$, ebenso $\Delta J = \pm 1, \pm 2$, oder 0, außer $0 \leftrightarrow 0$. Bei durch Störungen verursachter Emission verbotener Linien gelten — bei Abwesenheit eines Magnetfeldes — die gleichen Auswahlregeln, doch sind bei diesen Übergänge von L oder $J = 0$ nach L' oder $J' = 0$ erlaubt. Alle verbotenen Röntgenlinien sind Quadrupollinien. Äußere Störungen von der hierzu nötigen Größe einiger hundert Volt kommen nicht

vor. Hingegen ist im Röntgengebiet das Verhältnis von Quadrupol zu Dipol-Übergangswahrscheinlichkeit viel günstiger als im optischen, der Verf. berechnet z. B. für das Verhältnis der Intensitäten eines verbotenen Übergangs der *L*-Serie des Wolframs zu einem erlaubten der gleichen Serie etwa 0,3, während die Messungen 0,1 ergaben. Beim Li ist das Verhältnis einer S-D-Kombination zu einer analogen S-P-Kombination etwa $2 \cdot 10^6$. Auch die durch die genannten Quadrupolauswahlregeln verbotenen S-S-Kombinationen sind niemals in Röntgenspektren aufgefunden worden. Zuletzt wird berechnet, ob etwa die Störung durch das magnetische Kernmoment die verbotenen Übergänge bewirken könnte, wie dies wahrscheinlich bei den verbotenen Hg-Linien der Fall sein dürfte. Die Größenordnung dieses Effekts wird für Röntgenstrahlen berechnet und etwa 1000mal kleiner gefunden als der Effekt der Quadrupolübergänge, die also in diesem Gebiet die alleinige Ursache des Auftretens verbotener Linien bilden. Es wird ferner an dem Termschema eine Übersicht sämtlicher Quadrupollinien gegeben und durch Vergleich mit dem Experiment bestätigt. *Houtermans.*

Ganguli, A.: On the Raman effect from the standpoint of unimolecular reactions. (*Chem. Labor., Univ., Benares.*) *Philos. Mag.*, VII. s. 13, 306—310 (1932).

Der Raman-Effekt wird als unimolekularer Übergang von einem durch Absorption entstandenen Zwischenzustand in den Endzustand aufgefaßt. Daraus wird das Intensitätsverhältnis der Stokesschen zu den anti-Stokesschen Linien bestimmt.

F. Hund (Leipzig).

Mulliken, Robert S.: The interpretation of band spectra. III. Electron quantum numbers and states of molecules and their atoms. *Rev. Modern Physics*, 4, 1—86 (1932).

Vorliegender Bericht schließt sich an die früheren Berichte desselben Verf. an und behandelt auf Grund der dort besprochenen Resultate die Klassifikation der Elektronenniveaus zweiatomiger Moleküle mit Hilfe von Quantenzahlen der einzelnen Elektronen, sowie die Zuordnung dieser Niveaus zu den Atomniveaus in den Grenzfällen vereinigter oder weit getrennter Kerne. In der halbempirischen Betrachtungsweise werden die experimentell bestimmten Potentialkurven der Elektronenzustände weitgehend herangezogen, die für zahlreiche Moleküle in der Form von Diagrammen wiedergegeben sind. In Abschnitt A, der eine allgemeine Übersicht bietet, werden zunächst die Fälle erörtert, in denen es möglich ist, die Elektronenbahnen mit Symbolen wie $2p\sigma$ zu kennzeichnen, und im Anschluß hieran die Frage nach der Bildung abgeschlossener Schalen in zweiatomigen Molekülen. Es wird ferner kurz auf die energetischen Verhältnisse bei der Bindung der Elektronen in den verschiedenen Bahntypen sowie auf den vom Verf. herrührenden Begriff „promotion“ eingegangen. Abschnitt B bringt die Zuordnung der Molekülzustände zu den Zuständen des durch Vereinigung der Kerne entstandenen Atoms mit Aussagen über die energetische Reihenfolge. Die Ergebnisse sind vor allem für die Hydridmoleküle von Bedeutung. In Abschnitt C werden die Regeln über die Zahl, Art und Symmetrie der Molekülzustände, die zu gegebenen Zuständen der getrennten Atome gehören, zusammengestellt. Die energetische Reihenfolge wird mit Hilfe des Begriffs „promotion“ gedeutet und an Hand der Hydridmoleküle erläutert. Auch auf die Größe der Multiplettintervalle bei diesen Molekülen wird eingegangen. Abschnitt D, welcher den meisten Raum einnimmt, bringt die entsprechende Diskussion für alle übrigen Moleküle. Im Anhang stellt der Verf. die Methoden kurz zusammen, die zur Konstruktion der Potentialkurven dienen. Eine Tabelle der Elektronenkonfigurationen, Energiewerte, Kernabstände, Kernschwingungsfrequenzen und Dissoziationsarbeiten der Elektronenniveaus zweiatomiger Moleküle bildet den Abschluß des Berichts. (Vgl. dies. Zbl. 2, 229.)

R. de L. Kronig (Groningen).

Piccardi, G.: Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 14, 578—582 (1931).

Verf. behandelt die Vorteile und Schwierigkeiten der spektroskopischen qualitativen und quantitativen Analyse für chemische analytische Untersuchungen. In

Fällen, wo die Emissionsanalyse mit Flamme, Funken oder Bogen wegen des komplizierten Aufbaus des betreffenden Spektrums oder der geringen Persistenz der Linien versagen, wie im Falle des Eisens oder der seltenen Erden, bleibt bisher die Emissionsanalyse den rein chemischen Untersuchungen unterlegen. Bei einigen seltenen Erden und anderen Elementen läßt sich hingegen die Absorptionsanalyse mit Vorteil verwenden. In Fällen, wo auch diese versagt, schlägt der Verf. vor, besonders charakteristische Bandenspektren für analytische Untersuchungen heranzuziehen. Zu diesem Zweck werden Anregungsbedingungen gewählt, bei denen relativ beständige zweiatomige Moleküle emittieren, was bei einigen Elementen bei mäßiger Anregung gut durchführbar ist. Es zeigt sich, daß verschiedene Teile des Bandenspektrums verschieden beständig sind, so daß sich aus der Art und Zahl der auftretenden Bandengruppen, Banden und Zweige nach einmaligem Studium eines Bandensystems auch quantitative Rückschlüsse auf die Konzentration des zugehörigen Elements ziehen lassen. Versuche dieser Art wurden insbesondere am Yttrium und Lanthan durchgeführt, die, da sie ein sehr kompliziertes Linienspektrum haben und auch der Absorptionsanalyse nicht zugänglich sind, sich auf keine andere Weise spektralanalytisch erfassen lassen.

Houtermans (Berlin).

Blaton, J.: Über die Dispersion des Lichtes in der Umgebung von Quadrupollinien. (*Inst. f. Theoret. Phys., Techn. Hochsch., Lemberg.*) Z. Physik **74**, 418—428 (1932).

Bei der Ableitung der Kramers-Heisenbergschen Dispersionsformel wird angenommen, die Lichtwellenlänge sei klein gegenüber den Atomdimensionen. Bei Berücksichtigung der Retardierung muß die Dispersionsformel um Zusatzterme, entsprechend den Multipollinien, erweitert werden, die in der unmittelbaren Umgebung der bzw. Multipollinien überwiegen. Verf. berechnet diese Zusatzterme für die Quadrupollinien explizit. Verbotene Linien der Alkalimetalle im Gebiete anomaler Dispersion [Prokofjew, Z. Physik, **57**, 387 (1929)] lassen sich, gestützt auf Stevensons [Proc. Roy. Soc. (A) **128**, 591 (1930)] Berechnung der bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten, als Quadrupollinien deuten. Desgleichen die von Datta, ferner Soverby und Barrat in Absorption gefundene verbotene Alkalimetall-Linien. Wie auch Verf. betont, ermöglicht aber erst der transversale Zeemaneffekt eine sichere Unterscheidung zwischen erzwungenen Dipol- und spontanen Quadrupollinien. Schließlich wird das Quadrupol-Analogen des Dipol-*f*-Summensatzes aufgestellt. (Der Wert von r^2 für das H-Atom, vom Verf. explizit berechnet, findet sich in Arbeiten über Bahndiamagnetismus oder quadratischen Zeemaneffekt [z. B. Z. Physik, **58**, 368 (1929)].)

Guth (Wien).

Gomberg, M.: Some reflections concerning valence variation and atomic structure. Science (N. Y.) **1931 II**, 553—557.

Der Verf. gibt in diesem Vortrag vor der Amerik. Chem. Ges. nach einer historischen Darstellung der Wandlungen des chemischen Valenzbegriffs eine zusammenfassende Darstellung der modernen physikalischen Deutung der Valenz. Er unterscheidet dabei zwischen Verbindungen, die durch ein oder mehrere gemeinsame Elektronenpaare zusammengehalten werden (unpolare oder kovalente Bindung) und Verbindungen, bei denen die Valenzen durch Abgabe oder Aufnahme eines Elektrons zustande kommen (polare oder Ionenverbindungen). Er betrachtet dabei den letzteren Fall der Valenzbetätigung als eine Art Spezialfall der ersteren insofern, als bei der polaren Valenz eines der Valenzelektronen ganz zu dem Anion übergeht. Er führt als Beispiel das HCl an, das in flüssigem Zustand nicht elektrolytisch leitend eine unpolare Verbindung darstellt, in Lösung hingegen polar ist. Die Änderung der Valenzzahl bei einem Element ist, zumal bei schwereren Elementen, zu erwarten, wenn die an der Bindung beteiligten Elektronen verschiedenen Elektronenschalen angehören, wie dies bei Elementen wie Sc, Ti, Cr, Mn, den seltenen Erden usw. der Fall ist. Andere Fälle von Valenzänderungen in Fällen, wo alle Valenzelektronen zu der gleichen Schale gehören, finden ihre Erklärung in der Existenz der aus der Spektroskopie

bekannten Untergruppen innerhalb der gleichen Schale. Auf diese Weise werden Verbindungen wie PbCl_2 und PbCl_4 , PCl_3 und PCl_5 , SCl_2 , SCl_4 und SF_6 ermöglicht. Dabei brauchen die möglichen Verbindungen nicht immer energetisch stabil zu sein, und daher rührt auch die Tatsache, daß lange nicht alle derartigen Verbindungen wirklich aufgefunden worden sind. Freilich sind auf diese Weise das gelegentliche Auftreten einwertiger Valenz der Erdalkalien, des dreiwertigen Kohlenstoffs, des einwertigen Sauerstoffs oder die Valenzänderung des Chlors um je zwei Einheiten (1, 3, 5, 7) nicht unmittelbar verständlich. Doch sind auch derartige Feinheiten durch Anwendung der London-Heitlerschen Theorie mit Hilfe des Pauli-Prinzips erklärbar, ja sogar theoretisch vorauszusagen. Schwieriger ist bisher die Erklärung der sog. Überschußvalenzen, wie sie in der Theorie der Komplexverbindungen auftreten. Zum Schlusse betont der Verf., daß nur sehr wenige der wirklich möglichen und wenigstens im angeregten Zustande, z. B. bei höheren Temperaturen, oder unter dem Einfluß von Oberflächenkräften oder im Verlaufe von Kettenreaktionen auch vorhandenen Verbindungen wirklich als stabile Verbindungen der Chemie auftreten und nur bei diesen die strengen und theoretisch erklärbaren Valenzregeln der klassischen Chemie anwendbar sind.

Houtermans (Berlin).

Pelzer, H., und E. Wigner: Über die Geschwindigkeitskonstante von Austauschreaktionen. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Phys. Chem., Berlin-Dahlem.*) Z. physik. Chem. B 15, 445—471 (1932).

Nach einer Übersicht über die verschiedenen Typen chemischer Reaktionen: 1. Addition oder spontaner Zerfall $A + B \rightleftharpoons AB$; 2. Austauschreaktionen $A + BC \rightleftharpoons AB + C$; Energieübertragung $A^* + B \rightarrow A + B^*$ (* bedeutet angeregten oder ionisierten Zustand); Assoziation durch Dreierstoß $A + B + C \rightarrow ABC$; 3. Dissoziation durch Interferenz der Eigenschwingungen $ABC \rightarrow AB + C$, folgt eine genauere Untersuchung, unter welchen Umständen chemische Reaktionen im Sinne von London „adiabatisch“, d. h. ohne Elektronensprung, verlaufen. Bedingung hierfür ist wesentlich, daß die zu höheren Elektronenzuständen gehörigen Energieflächen (Energie als Funktion der festgehalten gedachten Relativkoordinaten der Atomkerne) weit genug von der Energiefläche entfernt sind, die zu dem Elektronenzustand der getrennten Atome gehört. Der Hauptinhalt der Untersuchung liegt aber in dem Versuch einer Berechnung der Reaktionsgeschwindigkeitskonstante der Reaktion: $\text{H} + \text{H}_2^{\text{para}} \rightarrow \text{H}_2 + \text{H}^{\text{ortho}}$. Eyring und Polanyi (vgl. dies. Zbl. 1, 314) beschränkten sich auf die Berechnung der Aktivierungswärme dieser Reaktion für die Bewegung der drei Atome auf einer Geraden, weil nach London für eine solche Bewegung sich die geringste Aktivierungswärme ergibt. Die vorliegende Arbeit macht sich von dieser Beschränkung frei und versucht nicht nur eine Berechnung der Aktivierungswärme, sondern auch der Reaktionsgeschwindigkeitskonstante selbst. Die mathematische Durchführung dieser Berechnung beruht auf einer Entwicklung der Energiefläche in der Nähe ihres Sattelpunktes und der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten für verschiedene Stoßrichtungen. Es ergibt sich Übereinstimmung mit den von Farkas, Geib und Harteck experimentell bestimmten Werten, doch sind drei Punkte unsicher: 1. Der experimentell bestimmte Wert der Aktivierungswärme; 2. die theoretische Vernachlässigung der Rückreaktionen (in denen nach Überschreitung des Sattelpunktes eine Rücküberschreitung stattfindet); 3. daß die Bewegung der H-Kerne klassisch (d. h. ohne Berücksichtigung der Wellenmechanik) durchgeführt ist.

E. Hückel.

London, F.: Zur Theorie nicht adiabatisch verlaufender chemischer Prozesse. (*Istit. Fis., Univ. Roma.*) Z. Physik 74, 143—174 (1932).

Im Gegensatz zu den bisher fast ausschließlich diskutierten adiabatisch (ohne Elektronensprung) verlaufenden Prozessen werden in der vorliegenden Arbeit nicht adiabatisch (mit Elektronensprung) verlaufende untersucht. In der Durchführung beschränkt sich die Arbeit auf Reaktionen zwischen zwei Atomen. Zunächst wird gezeigt, daß Reaktionen der Art $\text{Ar} + \text{N}^+ = \text{Ar}^+ + \text{N}$ (Umladungen); $\text{Hg}' + \text{Na} = \text{Hg} + \text{Na}'$

(Energieübertragungen); $\text{Na} + \text{Cl}_2 = \text{NaCl} + \text{Cl}$, nicht adiabatisch verlaufen können. — Für nicht adiabatische Reaktionen können die Relativkoordinaten R der Atomschwerpunkte nicht wie bei adiabatischen nur als Parameter in der für die Elektronenbewegung gültigen Wellengleichung behandelt werden, sondern sind als dynamische Variable einzuführen. Dies kann aber nicht in der Weise geschehen wie in der Dirac-Bornschen Elektronenstoßtheorie, weil die Zeit, während welcher die Reaktion stattfindet, hier nicht wie dort klein, sondern groß gegenüber der Schwebungsperiode der verschiedenen Elektronenzustände ist. Demgegenüber wird die Gesamteigenfunktion $\Psi(R, \xi, t)$ (ξ Elektronenkoordinaten in bezug auf die Atomschwerpunkte) nicht wie dort entwickelt nach Elektroneneigenfunktionen $u_k(\xi)$ mit Koeffizienten, die von den R und t abhängen, sondern nach Eigenfunktionen $\psi_k(R, \xi)$, die von den ξ und den R abhängen: $\Psi(R, \xi, t) = \sum_k f_k(R, t) \psi_k(R, \xi)$. Die $\psi_k(R, \xi)$ genügen der Wellen-

gleichung bei festgehaltenen R und werden mit Hilfe der üblichen statischen Störungstheorie für jedes R linear aus denjenigen Elektroneneigenfunktionen $u_k(\xi)$ (des Gesamtsystems) zusammengesetzt, die unter Nichtberücksichtigung der Wechselwirkungsenergie die Schrödinger-Gleichung befriedigen. Die zugehörigen (von den R abhängigen) Eigenwerte $E_k(R)$ und Koeffizienten $\alpha_{ki}(R)$ der Linearkombinationen bestimmen sich aus der Matrix der Wechselwirkungsenergie im System der $u_k(\xi)$. Aus der gesamten Wellengleichung, welche auch die Bewegung der Atomschwerpunkte enthält, ergibt sich dann ein Simultansystem von partiellen Differentialgleichungen für die Koeffizienten $f_k(R, t)$. In dieses geht wesentlich die Abhängigkeit der $E_k(R)$ und $\alpha_{ki}(R)$ von R ein. Diese Gleichungen werden aufgestellt unter der Annahme, daß nur 2 Elektronenzustände ψ_1, ψ_2 in Betracht kommen, und werden für den Fall zweier Atome diskutiert. — Für den stationären Fall (konstante Gesamtenergie) sind diese Gleichungen zu lösen mit den Randbedingungen, daß für $R = \infty$ f_1 eine auffallende ebene Welle + auslaufende Kugelwelle, f_2 eine auslaufende Kugelwelle darstellt. Integration der Quellen des zu f_2 gehörigen Stromes über den ganzen Raum liefert die Geschwindigkeit des Umsatzes. Für diesen läßt sich für gegebene Relativgeschwindigkeit ein „Wirkungsquerschnitt“ q der Reaktion definieren. Maßgebend für q ist nicht die absolute Größe der Wechselwirkungsenergie, sondern die Steilheit ihres Anstieges mit R ; ferner eine periodische Funktion, welche sich additiv aus Produktion der Art $f_1 \text{ grad } R f_2$ zusammensetzt. Damit sich für q merkbare Werte ergeben, kommt es nicht darauf an, daß die de Broglie-Wellenlängen, die zu Anfangs- und Endimpuls gehören, vergleichbar mit den Distanzen a sind, über welche sich die Wechselwirkungsenergie stark ändert, sondern darauf, daß die der Impulsdifferenz entsprechende Wellenlänge vergleichbar mit a ist. Adiabatisches Verhalten ist daher nur für kleine Geschwindigkeiten bzw. große Energiedifferenzen der Elektronenzustände zu erwarten. Ist andererseits die zur Impulsdifferenz gehörige Wellenlänge $\gg a$, so wird q wieder sehr klein. Diese Verhältnisse werden an einigen speziellen Fällen (verschiedene Arten der Wechselwirkungsenergie) diskutiert. — Es wird weiter ein allgemeines Verfahren (sukzessive Näherung) zur Lösung der simultanen Differentialgleichungen für f_1, f_2 angegeben, das sowohl für hinreichend große, als langsame Geschwindigkeiten konvergiert (die Konvergenz für mittlere Geschwindigkeiten wird nicht bewiesen). Hiernach wird die Berechnung von q durchgeführt unter Vernachlässigung der Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie von der Orientierung der Atome. Der Fall scharfer Resonanz (gleicher Atome) ist dabei gesondert zu behandeln; für ihn werden die Resultate identisch mit denjenigen der früheren Stoßtheorie. Den Schluß bildet eine Diskussion der numerischen Verhältnisse und des Übergangs vom adiabatischen zum nicht adiabatischen Verhalten. E. Hückel (Stuttgart).

Hund, F.: Bemerkung zu meiner Arbeit: Zur Frage der chemischen Bindung. Z. Physik **74**, 429–430 (1932).

In der genannten Arbeit (Z. Physik **73**, 1–30; vgl. dies. Zbl. **3**, 141) war durch eine Rechnung gezeigt worden, daß im Falle einer $s - p^2 - s$ Valenzbindung dreier

Atome eine gewinkelte Gleichgewichtslage resultiert, wenn die Resonanzglieder groß genug im Vergleich mit der Coulombschen Wechselwirkung sind. Ein Rechenfehler in dieser Rechnung wird berichtigt; die qualitativen Schlüsse werden hierdurch nicht geändert.

E. Hückel (Stuttgart).

Kothari, D. S.: A note on the transport phenomena in a degenerate gas. I. (*Cavendish Labor., Cambridge.*) *Philos. Mag.*, VII. s. 13, 361—379 (1932).

A derivation is given of the coefficients of viscosity, diffusion, electrical and thermal conductivity in an ionised gas in which the electrons obey the Fermi-Dirac statistics. The classical methods, as given by Jeans, are followed, the only modification being due to the new statistics. The coefficients are tabulated with a view to later astrophysical applications. A discussion of the mean free path in a degenerate gas is added.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Paine, H. H.: The „relaxation“ term in Debye and Hückel's theory of ionic mobility. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 28, 83—92 (1932).

Es wird eine anschauliche (aber nicht strenge) Ableitung der von Debye und Hückel für die Relaxationskraft auf eine in einem Elektrolyten unter dem Einfluß eines äußeren Feldes bewegten Ladung E (Kolloidteilchen) gegeben (unter Nichtberücksichtigung der Brownschen Bewegung des Teilchens). Ferner wird gezeigt, daß auch im Falle von Kolloidteilchen nicht nur die elektrophoretische, sondern auch die Relaxationskraft zu berücksichtigen ist. Eine Formel für die Wanderungsgeschwindigkeit, welche diesen beiden Kräften Rechnung trägt, wird abgeleitet.

E. Hückel (Stuttgart).

Ganguli, A.: On Langmuir's adsorption theory and Freundlich's isotherm. (*Chem. Labor., Coll. Duplex, Chandernagore.*) *Indian Phys.-Math. J.* 3, 53—59 (1932).

Es wird gezeigt, daß im Falle der Adsorption mehratomiger Moleküle an festen Oberflächen, von denen jedes in n Teile dissoziiert, die Langmuirsche Adsorptionsisotherme

$$a = \frac{Ac}{1 + Bc} \quad \text{übergeht in} \quad a = \frac{A'c^{1/3}}{1 + B'c^{1/2}},$$

und es wird eine statistische Berechnung der Konstanten A' , B' ausgeführt. — Es folgt unter Bezugnahme auf eine frühere Arbeit [*Z. Physik* 61, 411 (1930)] eine Bemerkung über elektrische Adsorption.

E. Hückel (Stuttgart).

Macfarlane, Angus, and Oliver Gatty: Activities and the standard state. I. Activity coefficients. (*Phys. Chem. Labor., Balliol Coll. a. Trinity Coll., Oxford.*) *Philos. Mag.*, VII. s. 13, 283—291 (1932).

Die Differenz der partialen molaren freien Energien \bar{F}_1, \bar{F}_2 eines gelösten Stoffes bei zwei verschiedenen Konzentrationen ist gegeben durch dessen Aktivitäten a_1, a_2 :

$$\bar{F}_2 - \bar{F}_1 = RT \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

Da nur die Differenzen der freien Energie gemessen werden können, sind die Aktivitäten nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Da alle Lösungen bei genügender Verdünnung ideal werden, normiert man a so, daß $\lim_{c \rightarrow 0} a/c = 1$ wird. Dadurch ist der

„Standard“-Zustand, für welchen $a = 1$ ist, festgelegt. Er hängt aber noch von der Konzentrationsskala ab, in der c gemessen wird. Daher hängt auch der Aktivitätskoeffizient, definiert durch $f = a/c$ von dieser ab. Der Standardzustand ist allgemein derjenige, für welchen $f = 1/c$. Es wird gezeigt, daß es für Berechnungen von partialen Molwärmern und Verdünnungswärmern zweckmäßig ist, solche Konzentrationsskalen zu wählen, für welche die Konzentration unabhängig von Temperatur und Druck ist und sich ferner auf Mole des Gelösten bezieht; dieses sind diejenigen, welche die Konzentration in Molen pro bestimmte Masse des Lösungsmittels oder der Lösung ausdrücken; es wird empfohlen, sie auf Masse des Lösungsmittels zu beziehen.

E. Hückel (Stuttgart).

Gatty, Oliver, and Angus Macfarlane: Activities and the standard state. II. Electrode potentials. (*Phys. Chem. Labor., Balliol. Coll. a. Trinity Coll., Oxford.*) *Philos. Mag.*, VII. s. 13, 291—296 (1932).

Das Standard-Elektrodenpotential ist definiert als Potential für die Aktivität $a = 1$. Es wird gezeigt, daß es zum Vergleich von Elektrodenpotentialen in verschiedenen Lösungsmitteln zweckmäßig ist als Konzentrationskala Volumennormalität zu wählen.

E. Hückel (Stuttgart).

Weiss, Pierre: L'hypothèse du champ moléculaire. Discussion des faits sur lesquels elle repose. *Ann. Physique*, X. s. 17, 97—136 (1932).

Die wichtigsten, bei Ferromagneten auftretenden Erscheinungen, die spontane Magnetisierung und ihre Temperaturabhängigkeit, die Proportionalität der Sättigungs- und remanenten Magnetisierung, welche die Existenz magnetischer Elementargebiete nahelegt, die magnetische Anisotropie ferromagnetischer Kristalle, der Paramagnetismus oberhalb des Curie-Punktes, die spezifische Wärme und der magnetokalorische Effekt der Ferromagneten werden hinsichtlich des experimentellen und theoretischen Befundes einer vergleichenden Prüfung unterzogen. — Insbesondere wird darauf hingewiesen, in welch befriedigender Weise die Annahme eines inneren magnetischen Feldes die wichtigsten experimentellen Tatsachen wiedergibt. Auch läßt sich die früher vom Verf. aufgestellte Hypothese der Proportionalität des inneren Feldes mit der Magnetisierung aufrechterhalten, wenn man zur Erklärung der Experimente eine entsprechende Temperaturveränderung der Sättigungsmagnetisierung annimmt. Die bisher noch ausstehende Erklärung dieses Verhaltens soll eine strengere Theorie des Ferromagnetismus liefern, in der das einzelne Atom des Ferromagnetikums wesentlich als Mehrelektronensystem behandelt wird.

F. Bloch (Leipzig).

Bloch, F.: Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Leipzig.*) *Z. Physik* 74, 295—335 (1932).

Die Heisenbergsche Theorie des Ferromagnetismus als eines Austauschphänomens führt auch in der durchsichtigsten (Slaterschen) Form auf ein sehr kompliziertes Säkularproblem. Zu seiner Behandlung werden in der vorliegenden Arbeit neue Methoden entwickelt. Die linearen Gleichungen werden zunächst in ein Differentialgleichungssystem übergeführt. Als Variable treten dabei die Amplituden der Spindichten pro Zelle (räumlich festliegende Atome) auf, aus denen das magnetische Gesamtmoment berechenbar ist. Im Sinne einer Kontinuumsapproximation (nach dem Muster der Debyeschen Theorie) lassen sich räumlich variable Spindichte-Amplituden für den ganzen Kristall einführen, die noch, entsprechend dem Vielkörperproblem, q -Zahlcharakter haben. Vernachlässigt man jetzt die daraus entspringenden Nichtvertauschbarkeiten, so erhält man relativ einfache „klassische“ Differentialgleichungen. Es ergibt sich damit zunächst das bekannte Resultat, daß die energetisch tiefsten Zustände je nach dem Vorzeichen des Austauschintegrals diejenigen höchster (Ferromagnetismus) oder kleinster Multiplizität sind. — Zum Verständnis von Remanenz und Hysteresis ist noch die magnetische Wechselwirkung der Spinnagnete selbst mitzunehmen. Dann ergibt sich als energetisch tiefster Zustand eine Aufteilung des ganzen Volumens in homogen magnetisierte Elementargebiete verschiedener Vorzugsrichtung. Ihre Form und Zahl kann abgeschätzt werden. Sie sind langgestreckte Fäden (weil dann die entmagnetisierenden Faktoren klein werden) mit einer Dicke von annähernd 30 (\cong der Wurzel des Verhältnisses der Austausch- zu den magnetischen Kräften) Atomabständen. Auch über den Ummagnetisierungsprozeß selbst lassen sich einige Aussagen machen. — Ferner werden noch die quantenmäßige und klassische Definition der Zustandssumme verglichen, wobei sich ergibt, daß man die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Konfigurationen eines Systems bei einer bestimmten Temperatur durch ein Kennardsches Wellenpaket darstellen kann. Damit ergibt sich eine Begründung dafür, daß der klassische Ansatz der reinen magnetischen Wechsel-

wirkung (natürlich von einer den Austauschenergien entsprechenden Größenordnung) für hohe Temperaturen eine gute Näherung liefert. *Nordheim* (Göttingen).

Bates, L. F.: *The thermoelectric properties of ferromagnetic substances.* Philos. Mag., VII. s. 13, 393—412 (1932).

Es wird über eine Reihe neuer Messungen an kurzen Stäben von Magnesiumarsenid berichtet, welche eine deutliche Änderung der thermoelektrischen Kraft am Curiepunkt zeigen. Während verschiedene Proben teils positiven, teils negativen Thomson-Koeffizient aufweisen, zeigt die reine Substanz am Curiepunkt einen negativen Thomson-Koeffizient und eine Abnahme der spezifischen Wärme. Die experimentellen Resultate werden im Licht neuerer theoretischer Beiträge zur Theorie des Ferromagnetismus diskutiert.

F. Bloch (Leipzig).

Brillouin, L.: *La théorie quantique des corps solides.* (Inst. H. Poincaré, Paris.) Scientia 51, 206—215 (1932).

Anschaulicher Überblick über die Debyesche Theorie der festen Körper und die Blochsche Behandlung der elektrischen Leitfähigkeit unter besonderer Berücksichtigung von Verfeinerungen des Verf. (Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten, Lichtstreuung, Numerierung der Elektronenwellen). *Nordheim* (Göttingen).

Ranzi, Ivo: *Sulla natura di un effetto foto-termoionico dovuto alle radiazioni rosse e infrarosse.* (Istit. di Fis., Univ., Camerino.) Nuovo Cimento, N. s. 8, 331—337 (1931).

Tamm, Ig.: *Some remarks on the theory of photoelectric effect of metals.* Physic. Rev., II. s. 39, 170—172 (1932).

Es wird, mit Zustimmung von Frenkel, festgestellt, daß eine Kritik von Frenkel (vgl. dies. Zbl. 2, 174) an der Theorie des Photoeffekts von Tamm und Schubin (vgl. dies. Zbl. 1, 178) auf einem Mißverständnis beruhte. Ferner wird darauf hingewiesen, daß der Potentialsprung C_a an der Oberfläche, der aus Elektronenbeugungsversuchen bestimmt wird, nur dann mit der aus der Theorie berechenbaren Größe $C_f = \text{Austrittsarbeit} + \text{Nullpunktsenergie}$ identisch ist, falls die Elektronen im Metall ganz frei wären. Es werden exakte Definitionen gegeben und plausibel gemacht, daß in einem periodischen Feld $C_a > C_f$ sein dürfte, in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Nordheim (Göttingen).

Frenkel, J., and A. Joffé: *On the electric and photoelectric properties of contacts between a metal and a semiconductor.* (Phys.-Techn. Inst., Leningrad.) Physic. Rev., II. s. 39, 530—531 (1932).

Betrachtet man die Kontaktwirkung zweier Leiter als das quantenmechanische Überspringen der zwischen ihnen liegenden Potentialschwelle durch die Leitungselektronen, so läßt sich eine Theorie des Gleichrichtereffektes zwischen einem Metall und einem Halbleiter geben, wenn man letzteren durch das Vorhandensein relativ weniger Leitungselektronen charakterisiert, deren Zahl überdies exponentiell von der Temperatur abhängt. Die so erhaltene Formel scheint den experimentellen Befund, insbesondere auch das Verschwinden des Gleichrichtereffektes, für hinreichend hohe Temperaturen befriedigend wiederzugeben. — Der starke lichtelektrische Kontakteffekt wird darauf zurückgeführt, das die Wahrscheinlichkeit eines lichtelektrischen Prozesses für ein „freies“ Elektron (im Metall) verhältnismäßig klein ist, gegenüber dem für ein „gebundenes“ Elektron (im Halbleiter). Für eine genauere Darstellung wird auf das erste Heft der Physikalischen Zeitschrift der Sowjetunion hingewiesen.

F. Bloch (Leipzig).

Jackson, J. M.: *A quantum mechanical theory of energy exchanges between inert gas atoms and a solid surface.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 136—164 (1932).

Experimentelle Untersuchungen von Roberts [Proc. Roy. Soc. (A) 129, 146 (1930)] ergaben bei besonders sorgfältig gereinigten Metalloberflächen für die Akkommodationskoeffizienten von Edelgasen viel kleinere Werte, als frühere Beobachter erhielten, und machten damit eine quantenmechanische Berechnung des Energieaustausches zwischen Edelgasatomen und Metalloberfläche, die Verf. auf Anregung von

R. H. Fowler unternahm, aussichtsreich. Das Metall wird als Oszillatorenengesamtheit derselben Frequenz und Masse (wie in Einsteins Theorie der spezifischen Wärme) behandelt. Die Wechselwirkung zwischen Gas und Metall [Abstoßung + (schwache) Anziehung] wird durch abteilungsweise konstante Potentiale approximiert. Die Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich mittels der Methode der Variation der Konstanten (erste Näherung) und werden in den einfachsten Fällen explizite berechnet. Die Ergebnisse — sie gelten, wenn die Energie des Gases klein ist gegenüber dem Abstoßungspotential der Metalloberfläche — sind für die Edelgase im großen und ganzen in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Zum Schluß wird die Berücksichtigung der Gitterstruktur des Metalls nach Born und v. Kármán und die Verallgemeinerung auf zweiatomige Gasmoleküle angekündigt. *Guth (Wien).*

Beams, J. W.: Electric and magnetic double refraction. *Rev. Modern Physics* **4**, 133—172 (1932).

Dieser Bericht zerfällt in zwei Teile, in denen die elektrische und magnetische Doppelbrechung (Kerreffekt und Cotton-Moutoneffekt) besprochen werden. Die experimentellen Methoden und die theoretische Deutung sowohl vom klassischen als auch vom quantentheoretischen Standpunkt aus werden unter Hinweis auf die Originalarbeiten zusammengefaßt. Eine kürzlich erschienene Arbeit von Th. Neugebauer [*Z. Physik* **73**, 386 (1931); vgl. dies. Zbl. **3**, 183], welche die Beziehung zwischen den älteren Theorien und der wellenmechanischen Behandlungsweise herstellt, ist dabei noch nicht berücksichtigt. Der Vergleich der Theorie mit der Erfahrung für Gase, Flüssigkeiten und Festkörper, vor allem was die Temperatur- und Frequenzabhängigkeit der Effekte betrifft, wird eingehend erörtert. Auch auf die Relaxationszeit des Kerreffekts und auf die Benutzung des Cotton-Moutoneffekts bei der Bestimmung der Kristallstruktur wird kurz eingegangen. *R. de L. Kronig.*

Bellia, C.: Über das Veränderungsgesetz des Halleffekts im magnetischen Feld. (*Physik. Inst., Univ. Catania.*) *Z. Physik* **74**, 655—662 (1932).

Die Hallkonstante des Bi folgt nach Versuchen des Verf. und anderer Autoren dem Gesetz $R = R_0 (1 + D H^2)/(1 + C H^2)$, wo R_0 die Hallkonstante bei verschwindendem Magnetfeld ist und H die Feldstärke. Das gleiche Gesetz ergibt sich formal aus der Sommerfeldschen Theorie, doch stimmt die Konstante C nicht mit dem Wert, den man aus der Änderung des Widerstands mit dem Magnetfeld berechnet. (Übereinstimmung ist auch nicht zu erwarten, da die Sommerfeldsche Theorie nur eine sehr rohe erste Näherung gibt, insbesondere für so „anomale“ Metalle wie Bi. Der Ref.)

H. Bethe (Roma).

Massey, H. S. W.: The collision of electrons with rotating dipoles. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **28**, 99—105 (1932).

Die Bornsche Methode zur Berechnung von Anregungswahrscheinlichkeiten beim Elektronenstoß ist gewöhnlich nur mit schnellen Elektronen durchzuführen und daher auf die Anregung der Schwingung und Rotation von Molekülen im allgemeinen nicht anwendbar. Für Moleküle mit einfachem Dipolpotential kann man aber die Lösung nach Potenzen des Dipolmomentes entwickeln und, wenn das Moment klein genug ist, bezüglich der Anregung der Rotationszustände auch bei kleinen Geschwindigkeiten Konvergenz erwarten. Nach Abseparieren der Rotation läßt sich daher das Problem im wesentlichen nach der Bornschen Methode behandeln. Verf. gibt eine einfache Formel nebst Kurve für den Wirkungsquerschnitt bei der Anregung des ersten Rotationszustandes unter Annahme eines Dipolmomentes von 10^{-19} CGS und einer Anregungsenergie von 1 V. Es zeigt sich, daß, wenn der Rotator zu Anfang im Grundzustande ist, die Wahrscheinlichkeit der Anregung des ersten Rotationszustandes viel größer ist, als die eines elastischen Zusammenstoßes. Wenn der Rotator nicht im Grundzustande ist, sollte der erste Rotationszustand im allgemeinen nicht am stärksten angeregt werden, aber die Wahrscheinlichkeit eines unelastischen Stoßes weiterhin größer bleiben als die eines elastischen. Die Größenordnung dieser Anregungswahrscheinlichkeiten

ist bei kleinen Geschwindigkeiten ziemlich erheblich und vermag die starke Zerstreuung von Elektronen in Dipolgasen zu erklären. *Wessel (Coimbra).*

Penney, W. G.: The theory of the excitation of atomic mercury by electron impact. *Physic. Rev.*, II. s. **39**, 467—473 (1932).

Die Anregungswahrscheinlichkeit der tiefsten P-Niveaus 1P_1 , 3P_0 , 3P_1 , 3P_2 von Hg durch Elektronenstoß wird als Funktion der Geschwindigkeit der einfallenden Elektronen untersucht. Der Verf. benutzt die Bornsche Stoßtheorie in erster Näherung und berechnet die darin auftretenden Matrixelemente, indem er die Wellenfunktionen nach Slater ansetzt. Um eine Abschätzung der hiermit erzielten Genauigkeit zu bekommen, bestimmt er die Zahl der Dispersionselektronen für die Resonanzlinien $^1S_0 - ^1P_1$, $^1S_0 - ^3P_1$ und findet sie in leidlicher Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Aus den Formeln für die Anregungswahrscheinlichkeiten geht hervor, daß mit wachsender Geschwindigkeit die Anregung der Triplett-niveaus gegenüber der Anregung des Singulett-niveaus nicht gänzlich verschwindet, sondern asymptotisch einem kleinen Grenzwert zustrebt, der mit der Singulett-Triplett-Aufspaltung zusammenhängt. Für langsame Elektronen ist die Anregungswahrscheinlichkeit für alle vier P-Niveaus von der gleichen Größenordnung. Es folgt ein kurzer Vergleich mit der Erfahrung. *R. de L. Kronig (Groningen).*

Minnaert, M.: Ändert sich die Wellenlänge bei der Resonanzzerstreuung? (*Phys. Labor., Heliophys. Inst., Univ. Utrecht.*) *Z. Astrophys.* **4**, 153—158 (1932).

The author considers Halpern's classical theory, Woolley's quantum model and Weisskopf's quantum mechanical treatment of this problem, and shows that all three lead to the same result, that the scattered frequency is exactly equal to the incident frequency. This is not the result found originally by the several writers. The original results of Halpern apply only to "practically monochromatic light". In the astrophysical application, "ideal monochromatic light" should be considered. This changes the result. The result given by Woolley requires modification since the lower state is sharp compared with the upper state. Exact calculations with Weisskopf's formula show that the scattered frequency is practically the same as the incident frequency, in the case of principal lines. *R. Woolley (Cambridge).*

Goldstein, L.: Sur l'excitation multiple d'atomes complexes par choes d'électrons. *C. R. Acad. Sci., Paris* **194**, 773—776 (1932).

Wenn man bei der Berechnung der Eigenfunktion eines Atoms die Wechselwirkung seiner Elektronen als Störung betrachtet, erhält man bekanntlich in nullter Näherung ein Produkt von Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen, in erster Näherung werden durch die Wechselwirkung mehrere solche „Produkteigenfunktionen“ miteinander verknüpft. Dank diesem Umstand können durch Elektronenstoß gleichzeitig zwei Elektronen angeregt werden; die Wahrscheinlichkeit hierfür wird formal, aber nicht explizit ausgerechnet. *H. Bethe (Roma).*

Geophysik.

● **Ergebnisse der kosmischen Physik.** Hrsg. v. V. Conrad u. L. Weickmann. Bd. 1. (Gerlands Beitr. z. Geophys. Suppl.-Bd. 1.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1931. XI, 448 S. u. 243 Abb. RM. 44.—.

Die mit diesem Band eröffnete Supplementbandreihe von „Gerl. Beitr. z. Geophys.“ dürfte in vorzüglicher Weise dazu geeignet sein, Astro- und Geophysikern den Überblick über die in den letzten Jahren enorm angewachsene Literatur ihrer Disziplinen zu erleichtern; der vorliegende Band behandelt in Form zusammenfassender Darstellungen (mit ausführlichen Literaturangaben) folgende Themen: „Über die Probleme des Polarlichtes“; hierin gibt C. Störmer, von der Morphologie über die Beobachtungspraxis zur mathematisch-physikalischen Theorie fortschreitend, einen Überblick über Entwicklung und gegenwärtigen Stand der Erkenntnis dieses interessanten kosm. Phänomens. Die Beiträge von W. Kolhörster und L. Tuwim behandeln zwei aktuelle Probleme der Höhenstrahlungsforschung; die Einführung der „Zählrohrfunktionen“ eröffnet in theoretischer und messungstechnischer Hinsicht neue Ausblicke. F. W. P. Götz berichtet über „Das atmosphärische Ozon“, dessen Bedeutung für

einen ganzen Komplex geophysikalischer Erscheinungen (Erdmagn., hochatmosph. Ionisation, Strahlung) sich immer deutlicher herausstellt. Die theoretischen und experimentellen Ergebnisse der Luftseismik behandelt P. Duckerts „Über die Ausbreitung von Explosionswellen in der Erdatmosphäre“. In „Neue Wege zur Bestimmung der Erdfigur“ nimmt F. Hopfner in kritischer Weise zu den bisherigen Methoden der Geodäsie Stellung und schlägt neue Arbeitsweisen auf potentialtheoretischer Grundlage vor. Der letzte Beitrag: „Zur Dynamik der Bewegungsformen auf der Erdoberfläche“ von F. M. Exner † behandelt in vergleichender Weise verschiedene hydrographische und geomorphologische Probleme (Strömung und Geschiebeführung in Flüssen, Dünen, Sandwellen, Schutthalden) und dürfte, da größtenteils nur elementare analytische Hilfsmittel Verwendung finden, auch in Geographenkreisen als Grundlage einer künftigen „mathematischen Geomorphologie“ Beachtung verdienen. *H. Ertel.*

Ackerl, Franz: Das Schwerkraftfeld der Erde. S.-B. Akad. Wiss. Wien II a 140, 743—752 (1931).

Der Verf. hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit (Das Geoid, I. Vgl. dies. Zbl. 2, 104) die bis Mitte 1931 bekanntgewordenen rund 4300 Beobachtungswerte für die Schwerkraftbeschleunigung an der Erdoberfläche durch Reduktion nach dem Verfahren von Prey in Randwerte am Geoid verwandelt und mit ihrer Hilfe erstmalig eine Erdkarte der Linien gleicher Schwerkraftbeschleunigung gezeichnet. Mit der Karte war die geeignete Grundlage für die Entwicklung der Randwerte in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe gegeben, deren Existenz vor kurzem nachgewiesen worden ist. In der nur vorläufigen Mitteilung werden die zahlenmäßigen Werte für die Koeffizienten der Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung angegeben; sie wurden nach einem von C. Neumann vorgeschlagenen Verfahren berechnet. Der Verf. stellt eine ausführlichere Veröffentlichung in Aussicht. *F. Hopfner (Wien).*

Heiskanen, W.: Tables isostatiques pour la réduction, dans l'hypothèse de Airy, des intensités de la pesanteur observées. Bull. géodés. Nr 30, 87—109, engl. Text 110—129 u. Tabellen 130—153 (1931).

Tafeln zur Reduktion der beobachteten Schwerkraftwerte nach der Prattischen Hypothese über die Kompensation der Massen in der Erdkruste sind seit langem vorhanden; hingegen fehlten bisher Tafeln für die Hypothese von Airy fast gänzlich. Der Verf. bespricht zunächst die Unterschiede der beiden Hypothesen, legt sodann die Voraussetzungen dar, auf deren Grundlage die Berechnung der Reduktionstafeln für die Airysche Hypothese vorgenommen worden ist, erläutert den Vorgang bei ihrer Berechnung und erklärt den Gebrauch der Tafeln. Unter den vom Verf. selbst erhobenen Einwänden bleibt der bekannte Einwand gegen die isostatischen Reduktionsverfahren, daß sie keine Randwerte am Geoid liefern, unerwähnt. *F. Hopfner (Wien).*

Coulomb, J.: Sur les ondes de Rayleigh et sur certaines transcendentes généralisant celles de Bessel. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 23, 91—137 (1931).

Diese Arbeit behandelt das mathematische Problem der seismischen Bodenwellen, das nach einer grundlegenden Arbeit Rayleighs (the late) von Love, Lamb, Bromwich, Somigliana u. a. bearbeitet wurde. Wenn n den Vektor der örtlichen Verschiebung, D die Bodendichte und λ, μ die Laméschen Konstanten bezeichnen, wird eine Lösung der Gleichung:

$$D \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} v + \mu \Delta v$$

gesucht, im unteren (unendlichen) Halbraum, welche an der ebenen Begrenzung dieses Halbraumes die beiden Druckkomponenten zu Null macht. Ähnlich wie in der Elektrodynamik läßt sich diese Aufgabe auf zwei skalare zurückführen, indem v von zwei Potentialen abgeleitet wird, die beide der Wellengleichung genügen. Es werden die Potentiale untersucht, welche von Punkt- und Linienquellen abhängen (Erschütterungsproblem). Durch Einführung der Oberflächenbedingung ergibt sich eine Gleichung dritten Grades, aus der die Wellenlängen und Dämpfungen der Störungswellen folgen. Je nach Annahme der Quellenverteilung ergeben sich die Wellentypen von Rayleigh, Lamb und Somigliana. Bei Annahme von gewissen Multiquellen ergeben sich Lösungen, die auf eine Verallgemeinerung Besselscher Funktionen dritter Art (Hankel-

scher Funktionen zweiter Art) nullter Ordnung führen. Im zweiten Teil der Arbeit wird das Potential einer gleichmäßigen Linienquellenverteilung mathematisch mittels Integration in der komplexen Ebene untersucht. Es werden Entwicklungsformeln nach Hankelschen und nach Kugelfunktionen für dieses Potential aufgestellt. Im dritten Teil wird eine Verallgemeinerung dieses Potentials betrachtet, welche durch $e^{in\theta}$ vom Azimut θ abhängt. Diese als Verallgemeinerung der Hankelschen Funktionen höherer Ordnung bezeichneten Funktionen werden in Reihen entwickelt, mit dem Integralsinus und -kosinus in Verbindung gebracht, und es wird gezeigt, daß sie den Nielsenschen Rekursionsformeln genügen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Tsuboi, Chûji: On the possibility of finding the permanent crust dislocation caused by an earthquake by means of its seismogram. Proc. Imp. Acad. Jap. (Tokyo) 7, 371 bis 374 (1931).

In den von Erdbeben heimgesuchten Gegenden Japans ist festgestellt worden, daß die Lage geodätischer Punkte sowohl plötzlichen als auch periodischen Änderungen unterworfen ist. Es wird ein Verfahren angegeben, das dazu dient, die durch ein Erdbeben erzeugte horizontale (bleibende) Verschiebung eines Punktes der Erdoberfläche aus dem Seismogramm abzuleiten. Es wurden Versuche mit einem gewöhnlichen, mit einer Schneide versehenen physikalischen Pendel angestellt, dessen Schwingungen durch Öl gedämpft werden. Das Pendelstativ wurde plötzlich um einige Zentimeter verrückt, die Schwingungen des Pendels wurden photographisch registriert. Aus der Registrierung läßt sich die horizontale Verrückung bis auf wenige Millimeter genau ableiten, wenn man die aufgezeichnete Kurve zweimal integriert, wie durch eine kurze mathematische Ableitung dargelegt wird. Ein Diagramm gibt Versuchsergebnisse.

Schmehl (Potsdam).

Higuchi, Seiichi: On the motion of the lever of the recording pin of Omori's horizontal pendulum seismograph at the time of an earthquake. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 20, 764—781 (1931).

In der Arbeit wird der Hebelarm, der die Zeichenfeder des Seismographen trägt, als elastisch betrachtet und seine Bewegung infolge des Eintreffens einer seismischen Welle sowie seine Wirkung auf das Seismogramm untersucht. Aus praktischen Gründen wird die Form sowie die Masse des Hebelarms des Seismographen von Omori den Untersuchungen zugrunde gelegt. Auf Grund der Betrachtungen wird eine Methode vorgeschlagen, die es gestattet, die Frequenz, die Zeitkonstante und die Amplitude einer einfallenden seismischen Welle zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sind verschiedene graphische Darstellungen gegeben.

Picht (Berlin-Lankwitz).

Dore, P.: Indirizzi antichi e recenti nello studio della teoria della propagazione delle onde sismiche. Boll. Com. Naz. Ital. Geodes. Geofis., II. s. 1, 117—123 u. 137—139 (1931).

Zusammenfassender Bericht über die Entwicklung der Studien betreffs der Fortpflanzung der seismischen Wellen nach der Elastizitätstheorie, mit Berücksichtigung der Anisotropie, der Viskosität und der Absorption des Mittels, mit genügender Beachtung der Ullerschen Theorie. Auch für die Oberflächenwellen sind die letzten Beiträge in derselben knappen Weise erwähnt.

Bossolasco (Turin).

Sezawa, Katsutada: On the transmission of seismic waves on the bottom surface of an ocean. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 9, 115—142 (1931).

Vom Erdbebenherd breiten sich neben longitudinalen und transversalen Raumwellen Oberflächenwellen verschiedenen Charakters aus: Love-Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit der Transversalwellen ausbreiten und bei denen die Massenteilchen nur in der Horizontalen, senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung schwingen, und Rayleigh-Wellen, die sich mit ca. 0,92 der Transversalgeschwindigkeit ausbreiten und bei denen die Massenteilchen Ellipsen beschreiben, deren größere Achse = 1,46 der kleineren, in der Vertikalen liegt. Für Rayleigh-Wellen, die sich längs eines Ozeanbodens ausbreiten, werden in vorliegender Arbeit die Bewegungsgleichungen für den festen Untergrund und das Wasser (viskos und kompressibel) aufgestellt und die Verrückungen angegeben. Nach Einführung der Grenzbedingungen für die Grenze Ozean-

boden • Wasser werden Geschwindigkeit der Rayleigh-Wellen und Verrückungen des Massenteilchens angegeben. Nur der auflastende Wasserdruck, nicht aber Viskosität und Kompressibilität beeinflussen die Rayleigh-Wellen am Grund der Ozeane; die Rayleigh-Wellen zeigen normale Dispersion, die sich, unabhängig von der Art der auslösenden Störung, bei größeren Entfernungen immer ausgeprägter zeigt. Die Wasserteilchen führen hauptsächlich vertikale Bewegungen aus; die Rayleigh-Wellen zeigen oszillatorischen Charakter; ihre Hauptbewegung läuft mit der Geschwindigkeit regulärer Rayleigh-Wellen und zeigt Phasenverschiebung. Die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit innerhalb der Rayleigh-Wellengruppe ist von den jeweiligen anteiligen Elementen abhängig. Gruppengeschwindigkeitsmaximum ist gleich der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit. — Ohne Berücksichtigung der Gravitation und der auflastenden Wasserschicht würde die Rayleigh-Welle keine Oszillation zeigen.

Brockamp (Berlin).

Sezawa, Katsutada, and Genrokuro Nishimura: Movement of the ground due to atmospheric disturbance in a sea region. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 9, 291 bis 308 (1931).

Seismogramme zeigen fast immer kleine Bewegungen, die durch Verkehr usw. verursacht werden. Neben diesen kurzperiodischen Bewegungen gibt es aber auch „seismische Bodenunruhe“ mit Perioden von 4—10 sec und Amplituden bis zu etwa 15 μ , die durch die Brandung des Meeres an Steilküsten verursacht ist. Verff. untersuchen die Bewegung des Untergrundes, wenn auf Wasserflächen Sturm wirkt. Vom Sturmzentrum breiten sich Wasseroberflächenwellen aus, die an die Küste anbränden, Rayleigh-Wellen, die längs des Wasseruntergrundes laufen, außerdem longitudinale und transversale Raumwellen vom Seeboden durch die feste Erdrinde. Für die seismische Bodenunruhe durch Sturm kommen nur die ersten beiden in Frage; aber auch der Anteil der Rayleigh-Wellen ist gering.

Brockamp (Berlin).

Sezawa, Katsutada: A kind of waves transmitted over a semi-infinite solid body of varying elasticity. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 9, 310—314 (1931).

In vorliegender Arbeit untersucht Sezawa Oberflächenwellen, die sich über einen elastischen Halbraum ausbreiten, dessen elastische Konstanten sich nach der Tiefe ändern. Für den Fall, daß keine Dilatation und keine Vertikalverrückung vorhanden ist und die Righeit μ sich mit der Tiefe so ändert, daß $\mu = c(d + z)$ ist, wo z die Tiefenlage des Massenpunktes unter der Oberfläche ist, werden Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen für die freie Oberfläche aufgestellt und ihre Lösungen angegeben. Die Geschwindigkeit einer solchen Welle

ist $V = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{24} (Kd)^2 \right\}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}$. Hierin bedeutet: $\mu_0 = (cd)$ die Righeit an der Oberfläche, $2\pi/K$ die Wellenlänge und ρ die Dichte.

Brockamp (Berlin).

Vedy, L. G.: On the determination of the horizontal component of the earth's magnetic field by a coupled oscillations method. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 109—114 (1932).

The paper describes a simple experiment to illustrate the phenomena of coupled oscillatory systems, using two magnets which oscillate in the earth's and their own magnetic fields. Approximate equations are derived for the frequencies of oscillation when the two magnets oscillate in a horizontal plane, with their centres on a horizontal line normal to the earth's horizontal force, at a distance apart such that there is small but appreciable magnetic inter-action between the two. Details of the experimental procedure are given, with results that suggest that the theory in its present form suffices only for observations of the nature of laboratory exercises for students. The illustrative measurements of the earth's magnetic field are quoted to an accuracy of 0.001 Gauss, and therefore the method, as so far developed, is not applicable for observatory use, where an accuracy to a few gamma (10^{-5} Gauss) is aimed at.

S. Chapman (London).

Darrow, Karl K.: Contemporary advances in physics. XXIII. Data and nature of cosmic rays. Bell Syst. Techn. J. **11**, 148—184 (1932).

Der Verf. sucht ein für Nichtfachleute verständliches Referat über das Gebiet der kosmischen Ultrastrahlung zu geben. Um allen Kontroversen über die Entdeckungsgeschichte zu entgehen, verlegt er den Beginn der diesbezüglichen Forschungen auf 1785 (Coulomb)! Im übrigen wird eine außerordentlich genaue Wiedergabe der Arbeiten der amerikanischen Forscher, insbesondere Millikans, geboten, während die europäischen vorhergegangenen Arbeiten überhaupt nicht oder nur in kurzen Fußnoten oder Anmerkungen Erwähnung finden. Viele wichtige Kapitel wie die Frage der Existenz der Sternzeitperiode, der Sonnenperiode, Barometereffekt, Schwankungen zweiter Art, Breiteneffekt werden nicht oder nur flüchtig erwähnt. Die umstrittenen Versuche von Millikan und Bowen mit den Pilot-Ballonmessungen bis 11 bzw. 15 km Höhe werden ausführlich besprochen und mit Illustrationen belegt. Genauer und objektiver ist das Referat über die Zählversuche mit Geiger-Müller-Zählerröhren und über die Versuche mit Wilson-Nebelkammern, das den Schluß des Artikels bildet. (XXII. vgl. dies. Zbl. **2**, 424.) V. F. Hess (Innsbruck).

Sutton, O. G.: A theory of eddy diffusion in the atmosphere. Proc. Roy. Soc. London A **135**, 143—165 (1932).

L. F. Richardson [Proc. Roy. Soc. London A **110**, 709 (1926)] has pointed out that diffusion in a turbulent atmosphere cannot be adequately represented by the Fickian equation $D\chi/Dt = \text{div}(K \text{ grad } \chi)$, because, owing to the various sizes of the eddies encountered, the diffusivity K must be a function of the mutual distance of the particles. The writer develops a theory in which the latter fact is taken into account; the theory is not based on a modified differential equation, but on a statistical equation established by G. I. Taylor, in a paper [Proc. London Math. Soc. **20**, 196 (1922)] on diffusion by continuous movements. This equation is

$$\sigma = \left\{ 2[u^2] \int_0^T \int_0^t R_{\xi} dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

where σ denotes the standard deviation of a set of diffusing particles from their mean position, after time T , $[u^2]$ denotes the mean energy of motion of the fluid (per unit mass), and R_{ξ} is the correlation coefficient between the motion of a particle at the beginning and end of an interval of duration ξ seconds. The writer assumes a particular form for R_{ξ} , on physical grounds, and hence deduces that $\sigma^2 = \frac{1}{2} C^2 ([u] T)^{2-n}$, in which C takes the place of the K in the Fickian theory of diffusion (which leads to the formula $\sigma^2 = 2 k T$). If $n < 1$, the new formula for σ^2 corresponds to the (probably true) case of an increase in the size of the effective eddy as the distance from the source increases. — From the formula for σ^2 , expressions are deduced for the density of particles, at different distances and times, from sources of various types — an instantaneous point source, a continuous point source, and a continuous line source. The results are compared with all the available data, and it is concluded that these agree better with the present theory than with the Fickian theory. The value of n indicated by widely different types of observation is $\frac{1}{4}$, while C at height z metres is approximately represented by $0.30 - 0.075 \log_{10} z$, in $(\text{cm.})^{1/8}$ units. It is suggested that the diffusion varies with the length of the observing period, and it is shown that this hypothesis agrees with the researches of Defant [S.-B. Akad. Wiss. Wien, **130**, 41 (1921)] on the distribution of winds over Northern Europe. S. Chapman (London).

Kolhörster, W., und L. Tuwim: Die spezifische Ionisation der Höhenstrahlung. (Höhenstrahlungslaborat. d. Meteorol.-Magnet. Observat., Potsdam.) Z. Physik **73**, 130 bis 136. (1931).

Sowohl in der für Ionisationsgefäße gültigen Formel: $J = J_0 \pi r^2 l \cdot 2 \pi \Phi(\mu H)$, wo J die gesamte Anzahl der in einer Sekunde im Volumen $v = \pi r^2 l$ der zylindrischen Ioni-

sationskammer vom Radius r und Länge l erzeugten Ionenpaare ist, wie auch nach Tuwim in der Gleichung für die Anzahl der von der Höhenstrahlung pro Zeiteinheit in einem zylindrischen Zählrohr herrührenden Stöße: $N_{\mu H(\alpha)} = N_0 r l [f_{1(\mu H, \alpha)} + \frac{r}{l} f_{2(\mu H, \alpha)}]$ — r innerer Radius, l die wirksame Drahtlänge des Zählrohrs, α der Winkel, den die Zählrohrachse mit der Vertikalen bildet, $f_{1(\mu H, \alpha)}$ und $f_{2(\mu H, \alpha)}$ = Zählrohrintegrale — findet sich je eine Konstante: J_0 und N_0 , die von der Lage und Größe der Meßgefäße und von μH (für eine gegebene Strahlungskomponente) unabhängig ist. Die Verff. zeigen, daß zwischen diesen beiden Größen eine Beziehung besteht. Unter der Annahme, daß J und $N_{\mu H(\alpha)}$ auf ein und dasselbe geometrische Gefäß bezogen wird, einmal als Ionisationskammer, dann als Zählrohr, bildet der Quotient $\frac{J}{N_{\mu H(\alpha)}}$ die mittlere gesamte Anzahl der von einem Höhenstrahl im betrachteten Meßgefäß erzeugten Ionen. Bei Division des Quotienten durch die mittlere Weglänge der Strahlen im Ionisationsgefäß, für die eine Formel abgeleitet wird, erhält man die spezifische Ionisation $k = \frac{J_0}{N_0}$. Aus einer Anzahl von Messungen mit 3 Strahlungsapparaten und 2 Zählrohren hinter allseitig 10 cm Blei — die Tabellen sind aufgeführt — errechnet sich die spezifische Ionisation im Mittel zu $k = 135$ Ionen cm^{-1} (Fehler $\pm 10\%$). Damit wird die spezifische Ionisation sehr schneller radioaktiver β -Strahlen mit $k = 45$ Ionen cm^{-1} um das 3fache übertroffen. Schließlich kann aus Absorptionskoeffizient μ , aus der zur Erzeugung eines Ionenpaares erforderlichen mittleren Energie π , für die als untere Grenze das Ionisationspotential $16e$ Volt gesetzt wird, und aus der spezifischen Ionisation nach der Formel: $E = \frac{J_0 \cdot \pi}{N_0 \cdot \mu}$ die Energie eines einzelnen Höhenstrahles berechnet werden: $E = 2 \cdot 10^9 e$ Volt als untere Grenze. Die Bedeutung dieser Bestimmung liegt nach den Verff. darin, daß sie nicht von hypothetischen Formeln und von irgendwelchen Annahmen über die Art der Höhenstrahlung abhängig ist.

Fritz Händel (Hoch-Serfaus).

Koschmieder, H.: Turbulenz und Druckerniedrigung auf Bergstationen. Meteorol. Z. 49, 116—118 (1932).

Ausgehend von der Ertelschen Arbeit über die Druckabnahme mit der Höhe in turbulent strömender Luft diskutiert der Verf. ausführlich, daß die Herleitung der Ertelschen Formeln nicht hinreichend gesichert ist und daß weiter die bisherigen Druckmessungen wegen ihrer individuellen Verschiedenartigkeit nicht als Stütze der Theorie angesehen werden können. Anstelle des Ertelschen Resultates: $\bar{p}(z) = \bar{p}_{\text{stat}}(z) - C \bar{\rho} \bar{v}^2$ [d. h.: das Zeitmittel $\bar{p}(z)$ des Druckes wird um die stets positive Größe $C \bar{\rho} \bar{v}^2$ (C = Konstante, $\bar{\rho}$ = mittlere Dichte, \bar{v} = Betrag der ausgeglichenen Windgeschwindigkeit) kleiner als der statische Druck $\bar{p}_{\text{stat}}(z)$] setzt Koschmieder:

$$\bar{p}(H) - \bar{p}(h) = p_{\text{stat}}(H) - p_{\text{stat}}(h) - 2(E(H) - E(h)),$$

wo H und h Druckabnahmestellen auf Berg- und Talstationen sind. Druckerniedrigung und Druckerhöhung infolge von Turbulenz, was durch die Turbulenzglieder $E(H)$ und $E(h)$ zum Ausdruck kommt, werden nun für Berg- und Talstationen, für Beobachtungen genau an der Erdoberfläche und in der freien Atmosphäre und in ihrer Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit erörtert. Es handelt sich also um die Feststellung des Vorzeichens der Differenz $E(H) - E(h)$, worüber von vornherein nichts Sicheres gesagt werden kann, und wobei Zufälligkeiten eine ausschlaggebende Rolle spielen.

Fritz Hänsch (Leipzig).

Haurwitz, B.: Über die Wellenlänge von Luftwogen. (Geophys. Inst., Univ. Leipzig.) Gerlands Beitr. Geophys. 34, Köppen-Bd. 3, 213—232 (1931).

Mittels der Bjerknesschen Störungsgleichungen in Lagrangescher Form wird eine neue Berechnung der Luftwogen unter Berücksichtigung des Einflusses der (iso-

thermen) Schichtung und der Kompressibilität durchgeführt. Nach der neuen Theorie liegen die Wellenlängen der Luftwogen für einen gegebenen Windsprung zwischen den Werten, die sich für eine inkompressible ungeschichtete Atmosphäre (Helmholtz-Wiensehe Theorie) ergeben, und denjenigen, die man für eine geschichtete, aber inkompressible Atmosphäre erhält. Die unter Berücksichtigung von Schichtung und Kompressibilität berechneten Wellenlängen stimmen mit den Messungsergebnissen am besten überein. Luftfeuchtigkeit wirkt im Sinne einer Vergrößerung der Wellenlängen.

Ertel (Berlin).

Schwerdtfeger, Werner: Zur Theorie polarer Temperatur- und Luftdruckwellen. Veröff. geophys. Inst. Leipzig 4, 255—317 (1931).

Die polare Welle von etwa 24 Tagen wird als ein rythmischer Abtropfvorgang polarer Luftmassen aufgefaßt. Erklärt wird dieses Abtropfen, also das Vorstoßen bzw. das Sichzurückziehen der Polarkalotte durch die Temperaturdifferenz, die an der Diskontinuität zwischen kalter polarer und wärmerer äquatorialer Luft auftritt. Analog zu dem Margulesschen Stabilitätskriterium liegt diese Temperaturdifferenz unter Berücksichtigung sämtlicher vorhandenen Kräfte und bei plausiblen Annahmen für die verschiedenen Windgeschwindigkeiten links und rechts der Diskontinuität zwischen 15° und 25° . Sie entwickelt sich allmählich infolge großturbulenter horizontaler Wärmezufuhr und weist bei genauer Beachtung aller Wärmequellen und Wärmeverluste während des Transportes der Luftmassen aus polaren und gemäßigten Breiten und unter besonderer Berücksichtigung der Unterlage eine „Tropfperiode“ von 19—26 Tagen auf. Diese theoretischen Überlegungen werden dann angewendet auf die 24tägige Welle des Winters 1923/1924 und die 20tägige Welle des Winters 1928/1929.

Fritz Hänsch (Leipzig).

Gião, Antonio: Essai d'hydrométéorologie quantitative. Gerlands Beitr. Geophys. 34, Köppen-Bd. 3, 142—163 (1931).

Ausgehend von den Gleichungen der Thermodynamik (Poissonsche Gleichung) und Hydrodynamik werden Formeln entwickelt, die die Berechnung der individuellen Temperaturänderung aus der lokalen Druckänderung und der horizontalen Geschwindigkeit ermöglichen. Führt man darin die relative Feuchtigkeit ein, so erhält man einen Ausdruck, aus dem sich ein Kriterium für den Einsatz der Kondensation ergibt. Es wird weiterhin dargelegt, wie sich aus diesen Formeln die enge Verknüpfung zwischen dem Druckfeld und den „systèmes nuageux“ ergibt. Die Rolle der Frontalvorgänge ist demgegenüber (nach Meinung des Autors) unbedeutend. Wolken bilden sich in einem Gebiet, wo die Luftmassen expandieren, aber pflanzen sich mit der Ursache dieser Expansion fort, nicht mit den materiellen Teilchen.

Haurwitz (Leipzig).

Wagner, A.: Zur Frage der Verdunstung. Gerlands Beitr. Geophys. 34, Köppen-Bd. 3, 85—101 (1931).

Es wird dargelegt, daß die Verdunstung ganz verschieden ist in der die Flüssigkeit unmittelbar umgebenden Gashaut (Grenzschicht) und in der weiteren Umgebung. Dort erfolgt der Transport von Wasserdampf und Wärme im wesentlichen durch Diffusion, im weiteren Außenraume dagegen hauptsächlich durch Strahlung. Die Außerachtlassung dieser Unterschiede hat in der Literatur häufig zu groben Unstimmigkeiten geführt. Verf. legt dar, daß für die Verdunstung die Vorgänge in der Grenzschicht maßgebend sind, die freilich ihrerseits von den Vorgängen im Außenraum beeinflußt werden, insbesondere von Windgeschwindigkeit und Luftdichte. Ferner wird versucht, den absoluten Betrag der Verdunstung einer Schneedecke und die Abhängigkeit der Verdunstung vom Luftdruck auf indirektem Wege abzuleiten.

Haurwitz (Leipzig).

Johannsen jr., H.: Mehrfachübersättigung der Wolkenluft oder Änderung der Gaskonstanten? Beitr. Physik frei. Atmosph. 18, 165—170 (1932).